REVISIÓN DE PROPUESTAS INTERNACIONALES EN EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Caso: Estándares alemanes - Producto 02

Preparado a solicitud del Sistema Nacional de Evaluación, Acreditación y Certificación de la Calidad Educativa – **SINEACE**

Lima, 10 de setiembre de 2014

SINEACE Orden de servicio N° 00463. Producto 02:

1. Análisis del desarrollo de estándares de aprendizaje para el curso de matemáticas en Alemania. Cómo se reportan la evaluación de área y sistema.

2. Ejemplos de los ítems en los cuales se evidencian los procesos y contenidos formulados en los estándares de aprendizaje, al concluir cuarto de primaria y cuarto de secundaria.

Consultora: Cecilia Torres Llosa de Guevara

ctorresllosa@gmail. com

Supevisión de traducción: Talía Guevara Torres Llosa

Nota:

Dado que el tema trabajado es altamente especializado, en la traducción se han utilizado los vocablos y los modos lingüísticos validados al traducir y adaptar los textos alemanes de la editorial Klett, realizados por el equipo del Instituto APOYO para el programa Matemáticas para Todos.

Asimismo, para garantizar la fidelidad en la traducción, la consultora ha contado con la supervisión de Talía Guevara Torres Llosa, formada como licenciada y magister en psicología educacional en la Albert Ludwigs Universität Freiburg en Alemania quien, además, ha formado parte de equipos de investigación en dicho país y trabaja en actividades educativas en el Perú.

TABLA DE CONTENIDOS

Presentación y sugerencia. . . p. 5

1. **Análisis del desarrollo de estándares de aprendizaje para el curso de matemáticas en Alemania. Cómo se reportan la evaluación de área y sistema…p.7**

    1.1 El Instituto para el Desarrollo de la Calidad de la Educación –IQB. Su participación en la evaluación de los estándares de aprendizaje y su comparación regional…p.9
    1.2 ¿Qué es VERA?...p.11
    - ¿Qué asignaturas y dominios se evalúan en VERA?
    - ¿Qué metas persigue VERA?
    - El potencial pedagógico de VERA…p.14

    1.3 El IQB y las regiones: ¿Quién es responsable de qué en VERA…p.16
    1.4 ¿Comparación regional?
    1.5 Investigación en el IQB…p.17
    1.6 Estructura de las competencias cognitivas
    1.7 Heterogeneidad de las competencias escolares…p.18

2. **Ejemplos de los ítems en los cuales se evidencian los procesos y contenidos formulados en los estándares de aprendizaje al concluir cuarto grado de primaria y cuarto grado de secundaria…P.19**

    2.1 Ejemplos de tareas – Cuarto grado de Primaria…p.21
    - Advertencia y sinopsis
    - Ámbitos de exigencia

    2.1.1 Ejemplo 1: Tablero posicional. Enfoque: número y operaciones…p.21
    2.1.2 Ejemplo 2: Descomponer números. Enfoque: números y operaciones…p.23
    2.1.3 Ejemplo 3: Números grandes. Enfoque: números y operaciones…p.24
    2.1.4 Ejemplo 4: Errores al calcular. Enfoque: números y operaciones…p.26
    2.1.5 Ejemplo 5: Cubo.Enfoque: espacio y forma…p.27
    2.1.6 Ejemplo 6: Construcciones de cubos. Enfoque: espacio y forma….p. 29
    2.1.7 Ejemplo 7: Triángulos. Enfoque: espacio y forma…p.30
    2.1.8 Ejemplo 8: Patrones de cinta. Enfoque: patrones y estructuras…32
    2.1.9 Ejemplo 9: Tablero del 100. Enfoque: patrones y estructuras…p.33
    2.1.10 Ejemplo 10: Agua. Enfoque: magnitudes y medir…34
    2.1.11 Ejemplo 11: Jardín. Enfoque: magnitudes y medir…36
    2.1.12 Ejemplo 12: Hornear tortas. Enfoque: magnitudes y medir…p.37
    2.1.13 Ejemplo 13: Tablas y diagramas. Enfoque: datos, frecuencia y probabilidades…39
    2.1.14 Ejemplo 14: Cubos. Enfoque: datos, frecuencia y probabilidades…41

2.2 Ejemplos de tareas – Cuarto grado de Secundaria…p.43
- Ámbitos de exigencia

2.2.1 Ejemplo 1: ¿Conviene tomar el desvío? – Medir…p.46
2.2.2 Ejemplo 2: ¿Por qué trabajan los estudiantes? - Datos y azar…p.47
2.2.3 Ejemplo 3: De estrella a pirámide – Medir…p.49
2.2.4 Ejemplo 4: Cubo – Medir, espacio y forma, datos y azar…p.51
2.2.5 Ejemplo 5: Incremento salarial – Relación funcional…p.52
2.2.6 Ejemplo 6: Rectángulo en el trapecio – Medir, espacio y formal, relación funcional…p.54
2.2.7 Ejemplo 7: Volumen de madera extraíble – Número, relación funcional…p.56
2.2.8 Ejemplo 8: Representaciones de cubos – Espacio y forma…p.57
2.2.9 Ejemplo 9: Pista de ski – Medir, espacio y forma…p.58
2.2.10 Ejemplo 10: Factorial – Número…p.59
2.2.11 Ejemplo 11: Tiempo en la escuela – Número…p.60
2.2.12 Ejemplo 12: Funciones lineales – Relación funcional …p.62
2.2.13 Ejemplo 13: ¿Prepago o postpago? …p.63
2.2.13 Ejemplo 14: Tanque de agua – Medir, relación funcional…p.65

3. Variación de las tareas…p.67

3.1 Una tarea intramatemática..p.69
3.1.1 La tarea “Diferencia de cuadrados”

- Solución
- Análisis
- Variaciones
- Resumen

3.2 Una tarea en contexto…p.74
3.2.1 La tarea “Pintar la fachada”
- Solución
- Análisis
- Variaciones

3.2 Conclusiones…p.75

Referencias bibliográficas…p.77

Presentación y sugerencia

En el marco de la consultoría: *Revisión de propuestas internacionales en el desarrollo de competencias matemáticas. Caso: Estándares alemanes*, este segundo producto contiene tres acápites. El primero consiste en una selección de textos extraídos y traducidos de dos fuentes: i) los dos prólogos – uno, de Werner Blum y, otro, de Ute Erdsiek-Rave ex presidenta de la Conferencia de Ministros de Cultura de la República Federal de Alemania,– ambos publicados en el libro de Blum sobre estándares de aprendizaje de matemáticas elaborado por el equipo del Instituto para el Desarrollo de la Calidad de la Educación (IQB) de la Universidad Humboldt de Berlín; y ii) extractos de información obtenida de la página web del mencionado instituto.

Esta primera sección da cuenta de los antecedentes que condicionaron la elaboración de los estándares de aprendizaje de matemáticas válidos hoy para todas las regiones de Alemania: desde los primeros pasos en 1997, con la declaración política de la Conferencia de Ministros de Cultura en Constanza, hasta su formulación como normativa oficial y obligatoria ocurrida entre los años 2003 y 2012, para el caso de matemáticas. Asimismo, se describen los principales componentes diseñados para asegurar la calidad de la formación matemática de los escolares alemanes. Aquí se describe un cambio de paradigma empírico, como resultado de la adopción de los estándares de aprendizaje.

Algunos de los rasgos que modelan este cambio de paradigma son: la voluntad de seguir participando en evaluaciones internacionales validadas, la importancia de la evaluación externa y la decisión sostenida de trabajar con un enfoque orientado a resultados. Un segundo aspecto descrito es el trabajo conjunto de pedagogos, docentes, expertos en la disciplina e investigadores congregados en torno al desarrollo teórico y conceptual, así como a la validación de los supuestos conque se opera. Ello da cuenta del fuerte énfasis puesto en la investigación empírica para el desarrollo de un sistema confiable de evaluación y monitoreo, con énfasis en el aseguramiento de la calidad de la formación que se realiza en las escuelas. Así, se describen como componentes estratégicos: el referido IQB – órgano científico encargado de gestionar la implementación de los estándares a nivel nacional; VERA o los trabajos comparativos que se aplican en todas las regiones, así como también, en algunas localidades en Bélgica y el Tirol; y la participación comprometida de los ministerios de cultura, de la mano con los institutos regionales nucleados por el IQB.

En este primer acápite se explica ampliamente el proceso que se sigue el elaborar las tareas y *tests*, su estatus, así como su validación empírica. Asimismo, se vislumbra el nivel de exigencia y *expertise* que conlleva la elaboración de las tareas. Esta labor está cargo de equipos docentes y expertos en la disciplina, quienes realizan una labor conjunta en el IQB. También se explica quiénes participan en la tarea, y sus niveles de responsabilidad, tanto a nivel nacional como regional. Dichas *tareas* – algunas de ellas correspondientes a ítems de evaluación – son, sin embargo, primordialmente, materia prima para el trabajo en el aula que realizan los docentes, así como para la labor de supervisión y monitoreo. Las tareas son, por así decirlo, el ADN que contiene los códigos para el desarrollo de competencias. De ahí su importancia y centralidad en el trabajo que realiza el IQB.

En el segundo acápite, se presentan ejemplos de tareas (*Aufgabenbeispiele*) traducidas de documentos oficiales de estándares de aprendizaje, con el detalle de su enfoque en las ideas directrices, las competencias que evalúan/desarrollan, así como sus ámbitos de exigencia. Tanto las explicaciones como los ejemplos de tareas permiten resolver algunos dilemas conceptuales, como por ejemplo: competencias versus contenidos, didáctica versus disciplina matemática… para enfocarse en aspectos esenciales como la calidad de las tareas, el desarrollo del pensamiento matemático, la diferencia entre tareas intramatemáticas y tareas en contexto, la importancia del método y los materiales didácticos y el rol del profesor, entre otros. Al revisar las tareas ejemplificadas se puede valorar su idoneidad tanto para la evaluación como para la formación de competencias, en el contexto del trabajo en el aula.

En el tercer punto se ha incluido un artículo de Hans Schupp, publicado también en el libro de Blum y cols. (ib.cit.) en el que se discute la importancia de variar (y profundizar) las tareas matemáticas y sus beneficios para el objetivo de desarrollar competencias, así como para acceder a ámbitos de exigencia cognitiva cada vez mayores. El artículo se desarrolla alrededor del concepto calidad versus cantidad, y trata de responder a la práctica tan difundida de usar ingente cantidad de ejercicios, tan difundida entre profesores de matemáticas.

Así pues, como complemento a lo presentado en el Producto 01, esta segunda entrega concretiza la dimensión política de los estándares de aprendizaje formulados por la KMK. Se puede percibir el gran esfuerzo de investigación empírica orientado a validar un enfoque de calidad educativa, basado en el modelo de progresión en los ámbitos de exigencia cognitiva. Este modelo permite, al mismo tiempo que detectar las dificultades que enfrentan los estudiantes; proponer medidas que fomenten el logro de resultados de aprendizaje cada vez más sostenibles. A ello está orientada la investigación en el IQB.

Sugerencia. Es claro que la calidad de los aprendizajes se consigue en el aula, en el encuentro de métodos con materiales pertinentes, estimulantes, exigentes, es decir, de gran calidad. En esa línea, y a modo de sugerencia, podría considerarse la posibilidad de buscar una alianza con el instituto IQB y el gobierno alemán para seguir desarrollando el modelo de estándares de aprendizaje, considerando que éste llegó al Perú a través de la cooperación alemana a fines de los 90 y comienzos del 2000.

De esta manera, los estudiantes peruanos y sus docentes podrían beneficiarse de la cuantiosa inversión realizada por el estado alemán, en un esfuerzo sostenido de investigación empírica de muchas décadas que – además – tiene como trasfondo una larga tradición en el desarrollo y la didáctica de las matemáticas. Dado que, en el Perú, el tiempo apremia – y que las décadas de crisis económica, política, social, y cultural han producido una situación de pobreza educativa endémica difícil de remontar –, una posible alternativa podría ser empoderar al Instituto Pedagógico Nacional para que, sostenidamente y en un esfuerzo coordinado con entidades públicas y privadas, pueda ser quien acopie – en un proceso de transferencia – los beneficios de una asociación con el IQB. El Instituto Pedagógico Nacional tiene una larga trayectoria institucional, una buena imagen en el conjunto de la sociedad peruana, redes establecidas con profesores a nivel nacional, una práctica de trabajo conjunto con equipos docentes, una buena infraestructura ya instalada y, sobre todo, una reconocida vocación de servicio que podrían contribuir al inicio de una larga saga que permita darle continuidad a los esfuerzos de implantar estándares de aprendizaje en el Perú.

1. Desarrollo de estándares de aprendizaje para la asignatura de matemáticas en Alemania. Cómo se reportan la evaluación de área y sistema

Nota: Esta es una traducción literal de extractos tomados de los prólogos el libro sobre estándares de aprendizaje de las matemáticas (Blum, 2006), así como de la página web del Instituto para el Desarrollo de la Calidad Educativa de la Universidad Humboldt de Berlín – IQB. En algunos contados casos, se han introducido frases de conexión para facilitar la edición.

Según Blum y colaboradores (2006), hasta el año 1990 - y tal como sucede en otros países en la actualidad – Alemania careció de una evaluación sistemática del rendimiento del proceso de formación que se realiza en las escuelas. Un interés principal del plan de formación fue hasta entonces el desarrollo y experimentación de modelos para optimizar el trabajo en cada escuela; así como el diseño de modelos didácticos y su introducción en la práctica que realiza el docente en el aula (orientación hacia el *Input*). El aseguramiento de lo que acontecía en los salones de clase quedó relegado a un segundo plano.

Esto cambió abruptamente el año 1977, al develarse los resultados del tercer estudio internacional de evaluación de matemáticas y ciencias naturales (TIMSS). El disponer de información sobre el rendimiento de los colegios alemanes en matemáticas y ciencias naturales precipitó una crisis del sistema educativo debido a los mediocres desempeños de los estudiantes. A partir de TIMSS se produce el así llamado cambio empírico en la pedagogía y se inician grandes estudios sobre rendimiento escolar a niveles regional, nacional e internacional.

En el plano político, en 1997 y con el Acuerdo de Constanza de la Conferencia de Ministros de Cultura (KMK), se sentaron las bases para una participación a largo plazo de Alemania en los estudios de logros de aprendizaje internacionales. Las reflexiones críticas acerca de si los rendimientos educativos puede ser medidos, pasaron a un segundo plano en beneficio de la convicción de que las competencias curriculares podrían ser medidas y verificadas con ayuda de *tests* de logros de aprendizaje. Una convicción que se respalda en el hecho de que la acción de los docentes en el día a día del trabajo escolar, da por sentado los controles de aprendizaje. En primer plano se encuentra ahora la pregunta acerca de qué niveles concretos de desempeño deberían lograr los estudiantes (orientación hacia el *Output* o resultado) y qué conclusiones se sacarán en nombre de esta necesaria medida de reforma del sistema de formación.

El punto culminante de este desarrollo lo marcó PISA 2000. Una renovada decepción por el limitado desempeño de la juventud alemana desencadenó medidas para asegurar la calidad de la educación. En todas las 16 regiones de Alemania se establecieron programas para homologar las asignaturas en los distintos grados y niveles de estudio. En igual medida, se instauraron la evaluación externa y la supervisión escolar. Por el lado de la KMK se realizó un gran esfuerzo para elaborar Estándares de Aprendizaje para algunas asignaturas escolares consideradas "asignaturas núcleo", válidos para todas las regiones. Estos estándares se definieron como metas de aprendizaje en la línea de estándares de desempeño.

Mediante su declaración del 4 de diciembre del 2003, la KMK hubo logrado su primera meta en este empeño, al aprobar los estándares de aprendizaje para *mittleren Abschluss* (hasta cuarto grado de Secundaria) para las asignaturas alemán, matemáticas y primera lengua extranjera (inglés/francés) válidos para todas las regiones del país.

Alrededor de nueve meses después entregaron los correspondientes para ciencias naturales, a continuación los estándares para el *Haupstschulabschulss*, así como los estándares para alemán y matemáticas en la *Grundschule* (ciclo básico único y universal hasta cuarto grado de Primaria).

Con los estándares de aprendizaje se alcanzó la meta de establecer un sistema transparente de aseguramiento de calidad de la educación en Alemania. Además, ellos contribuirán a la optimización de los procesos de enseñanza en el aula, a fin de elevar los resultados de aprendizaje. Los estándares de aprendizaje referidos al desarrollo de competencias en los/as estudiantes han sido formulados explícitamente para que puedan ser evaluados con ayuda de las correspondientes tareas matemáticas o *tests*. Esta medición es característica a nivel nacional e internacional; y,con toda modestia, es esta característica la que permite comprobar, en diferentes momentos del tiempo, si –y en qué medida – los estudiantes están adecuadamente equipados para su vida futura. Es decir, permite comprobar si hay necesidad de optimizar los procesos.

La posibilidad de transformar los estándares de aprendizaje en actividades de aprendizaje, no solo tiene implicancias para las mediciones de desempeño basadas de ítems de pruebas orientados a evaluar competencias; con ello también se ha logrado desarrollar material de trabajo en el aula basado en los postulados de los estándares. Este material puede satisfacer múltiples funciones en el sentido de los estándares de aprendizaje: sea la construcción de competencias, su práctica o también su evaluación, en forma de exámenes o tareas. De esta manera, los estándares de aprendizaje no solo construyen las bases para el aseguramiento de la calidad del sistema de formación de los/as estudiantes, sino que facilitan importantes sugerencias para el desarrollo de las sesiones de aprendizaje, en el sentido de una sesión que promete mayor sostenibilidad en la adquisición de conocimientos.

Respecto a la formulación de los estándares de aprendizaje, según informa la entonces presidenta de la Conferencia de Ministros de Cultura (KMK) de Alemania, Ute Erdsiek - Rave en el prólogo del libro de Blum y colaboradores (2006*)*, la Conferencia Permanente de Ministros – KMK- inició el proceso de formulación de estándares en octubre de 1997, durante la Conferencia de Constanza. En ella, se acordó que las escuelas alemanas debían participar en pruebas comparativas internacionales que están fundamentadas científicamente. Esto con el fin de obtener retroalimentación confiable sobre las fortalezas y debilidades de los estudiantes alemanes con respecto a ámbitos de competencia centrales.

Según la ministra, los estándares de aprendizaje aseguran la calidad de la enseñanza y permiten seguir desarrollándola. Asimismo, otorgan medidas comprables de desempeños en cada región de Alemania. (Erdsiek Rave – Ute, 2006). Entretanto, los resultados de TIMMS, PISA e IGLU han puesto en claro que la orientación en el *Input* prevaleciente durante mucho tiempo, no ha conducido a los resultados de calidad que el sistema de formación demanda. Por lo tanto, las regiones deben reorientarse hacia la tríada apreciada internacionalmente:

- una mayor independencia de las escuelas,
- con estándares vinculantes,
- y evaluaciones periódicas.

En Alemania, la KMK coordina este proceso.

Las escuelas son responsables por el desarrollo de las sesiones de aprendizaje, tanto para las evaluaciones internas como externas. Ellas evalúan su propio trabajo y se someten a retroalimentaciones estandarizadas. La calidad puede ser medida de manera sólida, cuando existen escalas de medición transparentes, afirma la señora Erdiesk-Rave. Los estándares son un requisito que permiten comparar las competencias logradas y seguir desarrollando la calidad de los aprendizajes que se realizan en clase. Por ello, a partir de PISA, la KMK ha puesto especial énfasis en focalizar su trabajo en el desarrollo e introducción de un marco de normas nacionales.

Actualmente existen estándares de aprendizaje nacionales para alemán y matemáticas, hasta el cuarto grado de Primaria; y para alemán, matemáticas, primera lengua extranjera (inglés/francés), así como para biología, química, física hasta el décimo grado(o cuarto grado de Secundaria).

Con ello, el desarrollo de la calidad educativa en las escuelas de todas las regiones de la República Alemana cuenta por primera vez con una escala común que les permite medir el desarrollo de la calidad en las escuelas de todas las regiones de la república federal de manera estandarizada.

Sin embargo, pondera la señora Erdsiek Rave, con la sola publicación de los estándares de aprendizaje todavía no se ha hecho nada. La KMK ha enfatizado persistentemente que este es solamente el primer paso de un extenso proceso de desarrollo continuo. Los marcos normativos solo son significativos y efectivos cuando son evaluados periódicamente. Por ello, el cumplimiento de los estándares debe ser evaluado en todo el país y también en cada región. Los/las estudiantes obtienen apoyo mediante materiales de aprendizaje basado en competencias, orientados hacia el logro de los estándares. Los primeros trabajos en esta línea se desarrollaron bajo la égide del consorcio alemán PISA.

A fines del 2004, la Conferencia Permanente de Ministros de Cultura fundó el Instituto para el Desarrollo de la Calidad Educativa en la Universidad de Humboldt en Berlin. Este instituto es activo en todo el país. Ahí, en cooperación, expertos en didáctica de cada materia y docentes, desarrollaron tareas comprobadas empíricamente para la evaluación de los estándares de aprendizaje (así llamadas „tareas para evaluar“) así como tareas adicionales con fines de implementación (así llamadas “tareas para la enseñanza”), las cuales deben concretizar los estándares.

1.1 El Instituto para el Desarrollo de la Calidad de la Educación IQB. Su participación en la evaluación de los estándares de aprendizaje y su comparación regional

El Instituto para el Desarrollo de la Calidad de la Educación *(Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen - IQB)* es un Instituto científico que apoya a todas las regiones de la República de Alemania en el desarrollo y aseguramiento de la calidad de sus sistemas educativos. El punto de partida y el fundamento de este trabajo son estándares de aprendizaje que fueron emitidos por la Conferencia Permanente de Ministros de Cultura de las Regiones de la República Federal de Alemania (KMK).

Estos estándares de aprendizaje definen qué competencias deberán haber desarrollado los/las estudiantes en un determinado punto en el tiempo de su trayecto escolar.

El IQB tiene el encargo de evaluar regularmente, en qué medida los colegios alemanes habrán logrado estas metas (monitoreo educativo).

Además, el IQB apoya a todas las regiones en implementar los estándares de aprendizaje como marco central de orientación para todos los actores en el sistema educativo. De ahí que el IQB sea uno de los institutos más importantes y activos en Alemania, en el ámbito de la investigación empírica en educación.

Si es así, y en qué medida se alcanzan las metas de aprendizaje formuladas en los estándares, será examinado y reportado regularmente por la IQB en períodos multianuales. Se presentarán los resultados obtenidos para cada región de la república federal.

Para esta comparación regional se necesitarán un gran números de ítems para evaluar; los cuales, por un lado, ilustran de manera adecuada el contenido de los estándares de aprendizaje; y, por el otro, proveen de información lo más completa y confiable posible de las competencias de los/las estudiantes en los ámbitos evaluados. El desarrollo de tareas (ítems) que cumplan con estos requisitos es altamente exigente y complejo

Las tareas o ítems de evaluación serán desarrollados por experimentados docentes, que serán entrenados intensivamente por la IQB, quienes trabajarán estrechamente con expertos/as en la didáctica de la disciplina. Los primeros borradores de las tareas o ítems de evaluación –*Test de tareas*-- desarrollados por los equipos docentes serán evaluados en los aspectos de la didáctica de la asignatura, probados en cuanto al lenguaje empleado y su compresión, y, eventualmente, retrabajados. Por último, las tareas se presentaran en algunas aulas, a fin de asegurar que los/las estudiantes manejan el formato y que comprenden los enunciados de las mismas. Luego de esta aplicación, las tareas se volverán a trabajar, en caso necesario.

En una aplicación piloto se probará si es que los *Test de tareas* pueden representar adecuadamente los resultados de aprendizaje. Se trata de una vasta aplicación piloto en la que participan varias regiones, con algunos miles de estudiantes. Sobre la base de un análisis minucioso de los resultados del piloto, se realizan las últimas correcciones de los tareas.

La versión definitiva de los Test de tareas se aplica, finalmente, a una muestra representativa de los/las estudiantes alemanes/as, a fin de determinar el grado de dificultad de los ítems para la población general. La información obtenida de esta estandarización constituye la base para el desarrollo de los modelos de niveles de competencia.

Los docentes, con el apoyo de los expertos en la didáctica de la asignatura, han llevado a cabo un trabajo muy intensivo y amplio del desarrollo de las tareas, hasta que estas puedan ser utilizadas en la comparación entre regiones. Su trabajo conjunto y competente con el IQB constituye el fundamento para toda la recolección de información sobre desempeño que se implementa en Alemania, sobre la base de los estándares de aprendizaje.

1.2 ¿Qué es VERA?

VERA es el nombre abreviado para *VERgleichsArbeiten* (trabajos comparativos) en tercer grado de primaria y octavo grado (VERA-3, VERA-8 respectivamente). Estos son trabajos escritos en forma de *tests*, que investigan de manera censal y en un grado específico qué competencias han logrado los estudiantes en un determinado punto de tiempo.

De manera censal significa que con VERA se registra de manera obligatoria el estado del aprendizaje en tercer y octavo grados de todas las escuelas y aulas de Alemania. En algunas regiones los *tests* VERA no se denominan "trabajos comparativos" sino más bien como „Censos del estado del aprendizaje" (Hessen, NRW), "KERMIT – Investigación de competencias" (Hamburg) o "*Tests* de competencias" (Sachsen, Thüringen). Desde el 2010 el sur del Tirol y Bélgica de lengua alemana también participan en VERA-3.

- **¿Qué asignaturas y dominios se evalúan en VERA?**

Las regiones se han comprometido a implementar VERA de manera obligatoria en tercer grado al menos en una de las asignaturas Alemán o Matemáticas. Si un año se evalúa Alemán, se evaluará, como mínimo, los dominios de competencia leer. Otros posibles dominios de competencia a ser evaluados en la disciplina alemán son: escuchar, ortografía o lenguaje y uso del lenguaje. Está contemplado que, en el futuro, también se pueda evaluar el escribir, en el marco de VERA-3, de manera opcional.

En la asignatura Matemáticas se evaluarán dos de los cinco ámbitos de competencia referidos al contenido (por ejemplo, números y operaciones y frecuencia y probabilidad). Antes de cada evaluación, las regiones en conjunto con el IQB deciden qué ámbitos serán en evaluados.

Para el octavo grado, igualmente, todas las regiones participantes se comprometen a aplicar VERA-8 de manera obligatoria en, al menos, una asignatura. Si se trata de Alemán, entonces se debe evaluar al menos el dominio de competencia leer, adicionalmente: escuchar, ortografía o lenguaje y uso del lenguaje. Se tiene previsto, en el futuro, un *Test* de VERA-8 para el dominio escribir. En la disciplina Matemáticas se evaluarán las cinco competencias referidas al contenido (ideas directrices).

En primera lengua extranjera (inglés o francés) se deben evaluar al menos los dominios leer o comprensión oral.

Las regiones pueden decidir libremente, tanto en VERA-3 como en VERA-8 si quieren evaluar más de una asignatura o ámbito de competencia. Para cada procedimiento, el cuerpo docente del IQB desarrollará nuevas tareas, probadas y editadas en un cuadernillo.

- **Modelos de niveles de competencia**

A fin de poder representar los resultados generales obtenidos en los estudios escolares de rendimiento de manera comprensible, los resultados de los *tests* no serán presentados en forma de una escala de puntajes, sino más bien serán referidos a un modelo de niveles de competencia.

Para el desarrollo de dicho modelo, los expertos en la disciplina establecerán una escala continua de competencia dividida en segmentos significativos y delimitados entre sí (*standard-setting)*.

Dicha escala se obtendrá mediante el análisis sistemático de la demanda cognitiva de las tareas o ítems que los/las estudiantes con determinados valores, han resuelto con cierta seguridad.

En la descripción del nivel se verá representado, qué demanda cognitiva pueden acometer los/las estudiantes, cuando logran determinado nivel de competencia. De esta manera será posible representar y describir cualitativamente las competencias alcanzadas por ellos/ellas; así como qué porción de estudiantes logra ciertas exigencias con alta seguridad y qué porción todavía no las alcanzan.

Tabla 1: Asignaturas evaluadas por Vera en los niveles de Primaria y Secundaria

Asignatura	Nivel Primaria	Nivel Secundaria I	
	(Fin del cuarto grado)	Hauptschul-abschluss	Fin de octavo grado
Alemán	Escuchar Leer Ortografía El modelo de niveles de competencia „Uso del lenguaje" se encuentra en revisión .		Escuchar Leer Ortografía
Matemáticas	Modelo global	Modelo global	
Inglés		Leer y escuchar	Leer y escuchar
Francés			Leer y escuchar
Ciencias naturales			Biología Química Física

Fuente: https://www.iqb.hu-berlin.de

- **¿Qué metas persigue VERA?**

La ejecución de trabajos comparativos nacionales en todas las regiones de la república federal de Alemania forma parte de las distintas estrategias conjuntas de la Conferencia de Ministros de Cultura – KMK -- para el monitoreo de la educación (2006). El monitoreo de la educación está enlazadao con el fortalecimiento del enfoque por competencias adoptado por el sistema educativo.

En lugar de la pregunta: qué contenidos deben ser enseñados en determinada disciplina; debe aparecer la pregunta: qué competencias deben haber logrado los/as estudiantes en esa disciplina en un determinado punto del tiempo.

De esta focalización se desprende una enseñanza en la cual se reemplaza el conocimiento ocioso que solamente requiere que los/as estudiantes puedan responder dentro del estrecho y conocido espectro de enunciados conocidos.

Ello permitirá que ellos/as desarrollen un conocimiento conectado que es valioso y que puede ser utilizado para resolver múltiples problemas. Así, se trata de una exigencia de la didáctica de la disciplina y la pedagogía muy ambiciosa, para la cual la resolución de *tests* y observaciones de rendimiento, solo pueden cumplir una función de soporte con la que pueden contar los profesores.

Entre las evaluaciones internacionales de rendimiento (como PISA, IGLU/PIRLS y TIMMS) y las comparaciones regionales para examinar los logros de los estándares de aprendizaje, por un lado; y los trabajos comparativos por el otro lado, existen importantes diferencias. Estas conciernen, sobre todo, a las metas que se persiguen (¿para qué deben servir los resultados?) y la pregunta sobre el nivel de la evaluación (¿quién será evaluado?).

Algunas de estas diferencias se resumen en la siguiente tabla:

Tabla 2: Estudios nacionales e internacionales de rendimiento que se aplican en Alemania

	Estudios internacionales *(PISA, PIRLS/IGLU, TIMSS)*	**Estudios nacionales de rendimiento** *(KMK-comparaciones regionales)*	**Información sobre trabajos comparativos sobre estándares de aprendizaje** *(VERA-3 und VERA-8)*
Diseño	Muestral	Muestral	Censal: todos los/las estudiantes del grado
Frecuencia	Cada 3 a 5 años	Cada 5 años en la escuela básica Cada 5 años en la secundaria	Anualmente
Principal objetivo	Monitoreo de sistema	Monitoreo de sistema	Desarrollo de la práctica en el aula que realizan las escuelas
Alcance de la evaluación	Los Estados/países	Las regiones de la república federal alemana	Escuelas, grupos de aprendizaje o aulas Schulen, Lerngruppen bzw. Klassen
Ejecución	Evaluadores externos externe	Evaluadores externos	Normalmente, los mismos docentes
Calificación	Central	Central	Cuerpo docente descentralizado así como los institutos regionales
Retroalimentación	Luego de 3 años aproximadamente	Luego de 1 año aproximadamente	Retroalimentación inmediata al cierre de la recopilación de datos; retroalimentación diferenciada con múltiples valores de comparación, luego de pocas semanas

Fuente: https://www.iqb.hu-berlin.de

- **El potencial pedagógico de VERA**

En marzo de 2012, la Conferencia de Ministros de Cultura fortaleció el convenio para el desarrollo continuo de VERA. Complementó su función central de realizar comparaciones, mediante una función de mediador para introducir los conceptos disciplinarios y didácticos relacionados con los estándares de aprendizaje.

En el convenio se enfatiza que VERA no es adecuado ni para la calificación ni tampoco deberá ser utilizado para el pronóstico del desempeño de las escuelas. En los *tests* de los trabajos comparativos no se interroga los materiales de enseñanza utilizados o el contenido del currículo, sino más bien el estado de las competencias, que puede ser independiente de éstos, bajo determinadas condiciones.

Además, en el convenio se enfatiza que se rechazará la publicación de los resultados de VERA para las escuelas en forma de rankings. Asimismo, la posibilidad de que haya una supervisión e inspección de las escuelas para ver los resultados de de VERA, debe seguir regulaciones claras, que se desprenden de la función central que tiene VERA, focalizada en el desarrollo de la escuela y de la enseñanza.

En la concepción de la KMK sobre el uso de los estándares de aprendizaje para el desarrollo de la clase, que apareció a fines del 2010, se refuerza la idea de que la retroalimentación del desempeño en estudios comparativos debe ser un componente central del circuito de desarrollo de la escuela, basado en evidencia. Además se habla de una "cultura del feedback" como soldadura entre la retroalimentación de datos y el uso de datos.

El potencial pedagógico de VERA para el cuerpo docente y para los estudiantes se evidencian en:

- la orientación hacia el desarrollo de competencias tanto de las tareas de evaluación como de la retroalimentación de los resultados,
- la mirada "desde afuera", es decir las múltiples opciones de comparación del estado de aprendizaje de una clase,
- la ampliación de las competencisa diagnósticas del cuerpo docente,
- la fundamentación y planificación de intervenciones pedagógicas y medidas de fomento,
- el uso de la retroalimentación del desempeño para el desarrollo cooperativo de las sesiones de aprendizaje entre el cuerpo docente,

El trabajo con ejemplos de tareas y comentarios didácticos constituyen una ayuda importante para la implementación. El IQB desarrolla y pone a disposición dichos ejemplos y comentarios.

1.3 El IQB y las regiones: ¿Quién es responsable de qué en el VERA?

Existe un reparto de responsabilidades bastante claro con respecto a VERA, entre el IQB --por un lado-- y los institutos regionales (también conocidos como agencias de la calidad) o los departamentos de los ministerios por el otro (ver diagrama).

Las regiones son responsables de implementar VERA. Ellas organizan la preparación, el desarrollo, la evaluación y la retroalimentación de los resultados con una responsabilidad propia, a partir de regulaciones específicas de la región. También se pueden adaptar el alcance y las tareas de la evaluación de acuerdo a necesidades y particularidades individuales de las regiones.

Bajo el liderazgo de la IQB, por otro lado, un equipo de docentes desarrolla las tareas de evaluación para todas las regiones. Expertos en didáctica de diversas universidades verifican y califican dichas tareas. Además, investigadores expertos en evaluación del IQB validad las tareas de forma empírica, al aplicarlas en cientos de escolares antes de su uso en todo el país, comprobando así su idoneidad y dificultad.

En la evaluación real de VERA sólo se utilizan aquellas tareas, que hayan demostrado su calidad en este proceso de prueba. El IQB reúne en cuadernillos de evaluación las tareas que han sido validadas desde un punto de vista didáctico y estadístico.

<table>
<tr><td colspan="2">Bajo la responsabilidad de….</td></tr>
<tr><td>IQB</td><td>Regiones</td></tr>
<tr><td>Desarrollo de las tareas
Validación de las tareas (pilotaje)
Identificación de la dificultad de cada tarea (escalado)
Producción del cuadernillo de evaluación
Diseño de materiales didácticos complementarios</td><td>Impresión y distribución de los cuadernillos de evaluación
Implementación de la evaluación
Corrección e ingreso de data
Análisis estadístico
Diseño de la retroalimentación
Retroalimentación
Apoyo a las escuelas a partir de medidas luego de la retroalimentación de resultados</td></tr>
</table>

1.4 Comparación regional

La Conferencia de Ministros de Cultura acordó la implementación regular de comparaciones regionales, en el marco de su estrategia general para el monitoreo educativo.

El objetivo de estos estudios de comparación regional es comprobar, en qué medida los/as estudiantes alemanes logran alcanzar los estándares de aprendizaje nacionales, que rigen para todas las regiones.

En el caso de la escuela primaria se realiza una comparación regional cada 5 años, mientras que en el caso del nivel secundaria I se realiza cada 3 años (alternando Alemán/inglés/francés y matemáticas/ciencias naturales). E

sta comparación da retroalimentación a las regiones con respecto al nivel de competencia alcanzado por las y los/as estudiantes en los ámbitos evaluados.

Estos estudios comparativos forman parte de amplio sistema de sondeos, que - flanqueados de medidas de soporte – apuntan a un desarrollo de clases orientado hacia las competencias y hacia el aseguramiento de la calidad educativa.

Los resultados de los estudios se califican al nivel de los sistemas escolares de las regiones. A partir de los resultados publicados no es posible sacar conclusiones sobre escuelas, clases o escolares particulares.

1.5 Investigación en el IQB

Como entidad científica el IQB no solamente presta servicios de tareas para las regiones, sino también desarrolla diversos proyectos en el ámbito de la investigación empírica de la educación. Como interrogantes centrales, que se investigan en IQB , se encuentran, entre otras:

- ¿Qué estructuras muestran competencias relativas a la escuela y pueden ser medidas de manera confiable?
- ¿Qué factores influyen en el éxito del aprendizaje en los niños y adolescentes?
- ¿Cómo se pueden controlar óptimamente las múltiples demandas metódicas de las mediciones escolares y compraciones escolares?
- ¿Cómo se desarrollan las competencias orales y lectoras que son necesrias para el aprendizaje escolar, y cómo se pueden registrar y fomentar?
- ¿En qué medida y bajo qué condiciones es posible que el cuerpo docente programe sus sesiones de aprendizaje orientadas a competencias?
- ¿Cómo pueden emplearse las nuevas tecnologías para un diagnóstico exigente de competencias escolares?

1.6 Estructura de las competencias cognitivas

Los pilares del Instituto para el Desarrollo de la Calidad Educativa IQB son la operacionalización y el registro de competencias. Para ello, se requiere definir teóricamente los constructos que se quieren medir y su estructura; y, con ello, comprobar empíricamente los supuestos relacionados. Así se garantiza una fundamentación teórica y empírica que se investigan en los estudios comparativos entre regiones y otros estudios comprativos, entre otros. Luego, con los datos recogidos se pueden emitir declaraciones acerca de las fortalezas y debilidades encontradas en los distintos ámbitos de competencia.

- Los análisis empíricos de estructura, es decir de dimensión, que se realizan en el marco de las investigaciones de validación, abordan en qué medida las competencias investigadas son capacidades cognitivas que se pueden distinguir unas de otras y cómo es que estás se relacionan entre sí. Los resultados de las investigaciones de competencias, que se basan en modelos estructurales diferenciados, pueden producir información importante para la política educativa, así como para la práctica escolar, con respecto a los ámbitos en que es necesario un mejor fomento.

- En el IQB se investiga por un lado, en qué medida se pueden diferenciar dimensiones distintas dentro de una competencia particular. Esto atañe - entre otros - el análisis de la estructura interna de la competencia de lectura, como por ejemplo la comprensión lectora de textos literarios por un lado y la comprensión lectora de textos informativos por el otro.

Además se investiga qué relaciones existen entre las diferentes competencias de una misma área. Por ejemplo se investiga la diferenciación empírica entre la competencia de lenguaje productiva y receptiva, así como oral y escrita, en inglés como lengua extranjera. También se investigan las relaciones entre las capacidades cognitivas generales de los/as estudiantes, sus conocimientos declarativos y sus competencias específicas para cada ámbito, como por ejemplo la comprensión lectora.

1.7 Heterogeniedad de las competencias escolares

Para obtener información sobre diversos enfoques para mejorar el desarrollo de las competencias escolares, es necesario determinar los factores condicionantes de los procesos de enseñanza-aprendizaje en diferentes niveles. Estos abarcan desde el nivel del sistema escolar y su dirección, hasta características de las clases y de la interacción docente-alumno/a. Además, la familia y sus condiciones de vida juegan un rol central en el desarrollo de las competencias de niños y jóvenes. Abordamos, primordialmente, la gestación de diferencias en el éxito educativo que se relacionan con el contexto social y migratorio de los/as estudiantes, y las posibilidades que existen de minimizarlas.

En el nivel del colegio o el aul, nos interesa la pregunta sobre en qué medida la composición del cuerpo de escolares tiene un efecto sobre el desarrollo de las competencias de los/as estudiantes particulares. Se investiga, cuánto del desarrollo de competencias de un niño o joven depende del contexto socioeconómico o lingüístico de sus compañeros y qué otras características de la clase o del colegio refuerzan o debilitan esta relación.

Además, nos preguntamos mediante qué procesos se explica la relación entre la composición del cuerpo escolar y el desarrollo individual de competencias. Se pone especial énfasis en las características de la sesión de aprendizaje, como, por ejemplo, la cantidad de actividad mental o la eficacia del manejo de clase. A partir de los resultados de los análisis se puede contar con algunas orientaciones para mejorar las situaciones de enseñanza-aprendizaje en escuelas y aulas con diferentes composiciones, con miras a garantizar que todos los/as estudiantes reciban el mejor fomento posible.

Las disparidades sociales en el sistema escolar significan un mayor riesgo para algunos escolares, de no poder desenvolver todo su potencial. Por ende, otro énfasis en la investigación está puesto en la pregunta, si algunos escolares en condiciones iniciales desfavorables logran hacer frente a las exigencias escolares con éxito. En los análisis correspondientes se intenta identificar factores que permiten a los/as estudiantes superar obstáculos en su trayectoria escolar, que tiene que ver con su contexto de origen.

2. Ejemplos de los ítems en los cuales se evidencian procesos y contenidos formulados en los estándares de aprendizaje, al cuarto grado de primaria y cuarto grado de secundaria

Nota: El punto 2.1 es una traducción del punto 4. *Aufgabenbeispiele* del documento oficial sobre estándares de aprendizaje matemáticas (KMK,2004) pp. 13 a 35.

2.1 Ejemplos de tareas al concluir el cuarto grado de Primaria

- **Advertencia y sinopsis**

Los siguientes ejemplos de tareas sirven para la concretización de los estándares para las clases de matemáticas de la escuela básica. No representan un inventario de *tests*, sino más bien describen tareas que los niños/as deben poder llevar a cabo en clase al concluir el cuarto grado de Primaria. Dichas tareas marcan una cultura de trabajo que corresponde a los conocimientos didácticos actuales.

Los ejemplos no constituyen una tipología cerrada. Son, más bien, modelos para guiar la construcción de tareas comparables, en la amplia sumatoria de niveles de exigencia posibles. Los ejemplos no cubren por igual todas las competencias descritas.

Los ejemplos de tareas están clasificadas por enfoque según corresponden a los estándares para las *competencias matemáticas generales* y para los *competencias matemáticas referidas al contenido* Varios ejemplos de tareas representan estándares de dos o más dominios y, con ello, muestran la interconexión de las ideas directrices.

Tabla 3. Sinopsis

	Ejemplos de tareas	**Ideas directrices/Enfoque**
1	Tablero posicional	Números y operaciones
2	Descomposición de números	Números y operaciones
3	Números grandes	Número y operaciones
4	Errores al calcular	Números y operaciones
5	Cubos	Espacio y forma
6	Construcciones de cubos	Espacio y forma
7	Triángulos	Espacio y forma
8	Patrones y cenefas	Patrones y estructuras
9	Tablero del 100	Patrones y estructuras
10	Agua	Magnitudes y medir
11	Jardín	Magnitudes y medir
12	Hornear en la cocina	Magnitudes y medir
13	Tablas y diagramas	Datos, frecuencia y probabilidades
14	Jugando a los dados	Datos, frecuencia y probabilidades

- **Ámbitos de exigencia**

Los siguientes ejemplos de tareas muestran la amplitud de los distintos ámbitos de exigencia. Algunas tareas, como las relacionadas con fracciones, se pueden resolver mediante la reproducción de procedimientos que han sido practicados y ejercitados en un marco limitado. Otras exigen el trabajo personal autónomo y creativo con competencias matemáticas adquiridas.

Cuando los ejemplos de tareas se definen y, por tanto, han sido diseñados como “representantes” de determinados ámbitos de competencia, se trata de una relación provisional, empírica, no validada cuya correspondencia no siempre es unívoca. Se presentarán aquí las así llamadas “Grandes Tareas” que soportan desempeños heterogéneos de cálculo por estudiantes de primaria, que, en igual contexto de contenido, cubren un amplio espectro de distintas exigencias y dificultad. Por ello, los ejemplos pueden servir como patrones para sesiones de aprendizaje en las que se planifican actividades diferenciadas, en las cuales todos los niños/as trabajan el mismo contenido, pero no necesariamente realizan las mismas actividades.

En los ejemplos de tareas se pueden diferenciar los siguientes ámbitos de exigencia:

<u>Ámbito de exigencia “Reproducir”</u> (AE I)La solución de las tareas requiere conocimientos básicos y la ejecución de actividades rutinarias.

<u>Ámbito de exigencia “Establecer relaciones”</u> (AE II). La solución de tareas requiere el conocimiento y empleo de relaciones.

<u>Ámbito de exigencia “Generalizar y reflexionar” (AE III).</u> La solución de tareas requiere actividades complejas como estructurar, desarrollar estrategias, juzgar y generalizar.

2.1 Ejemplos de tareas - Cuarto grado de Primaria

2.1.1 Ejemplo 1: Tablero posicional

Enfoque : Números y operaciones

Referencia a los estándares:

- reconocer relaciones matemáticas y desarrollar suposiciones,
- desarrollar estrategias y utilizarlas (por ejemplo, probar sistemáticamente),
- comprender la construcción del sistema de numeración decimal,
- representar números hasta 1 000 000 de diversas maneras y relacionarlas entre sí.

Planteamiento de la tarea:

Este es un número representado con fichas en el tablero posicional:

DM	M	C	D	U
●●●●●	●	●●●	●●●●●●●●●	●●●●

Tarea 1:
¿Cómo se llama el número) (AE I)

Tarea 2:
Tom retira una ficha de la casilla de las decenas.
¿Cómo se llama el nuevo número? (AE II)

Tarea 3:
Uta hace algo distinto. Ella aumenta una ficha en la casilla de las decenas. Anota la operación de lo que hizo Uta. (AE II)

Tarea 4:
¿Qué sucede cuando se desplaza una ficha de la casilla de los millares a la casilla de las decenas de millar?

El número disminuye en 1 000 □
aumenta en 1 000 □
disminuye en 9 000 □
aumenta en 9 000 □
aumenta en 10 000 □

Tarea 5:

En este tablero posicional vacío se colocarán dos fichas. (AE III)

Existen distintas posibilidades.

DM	M	C	D	U

Anota los tres números más grandes, que se pueden representar con dos fichas en el tablero

Anota los tres números más pequeños, que se: pueden representar con dos fichas en el tablero.

2.1.2 Ejemplo 2: **Descomponer números**

Enfoque: Números y operaciones

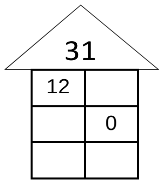
Referencia a los estándares:

- aplicar conocomientos matemáticos, destrezas y capacidades al trabajar con tareas de contenido problemático,
    - comprender las cuatro operaciones básicas y sus relaciones.

Planteamiento de la tarea:

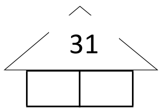
Descompón el número 31 en dos números.

Tarea 1:

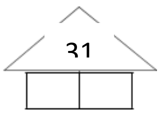


Anota los números que faltan. (AE I)

Tarea 2:



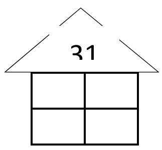
Encuentra un par de números en el cual uno de los números es mayor que el otro en una unidad. Escribe los números.



Tarea 3:

Descompón el numero 31 en dos números de modo que uno sea divisible entre 5 y el otro entre 2. Existen más soluciones para la tarea 3. Escríbelas**!**

Tarea 4:



Hay más soluciones para la tarea 3. ¡Escríbelas! (AE III)

2.1.3 Ejemplo 3: **Números grandes**

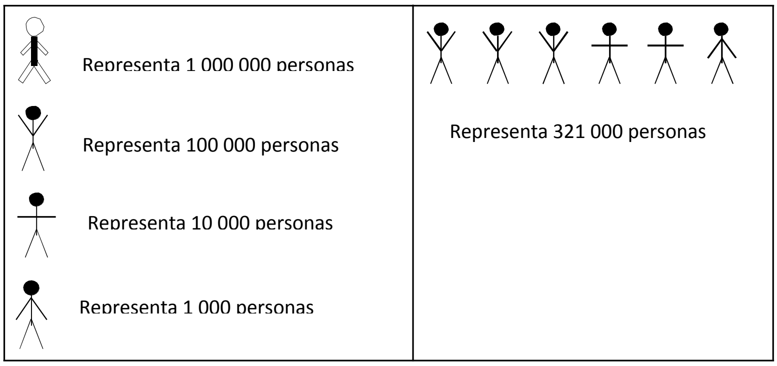
Enfoque: Números y operaciones

Referencia a los estándares:

- obtener información relevante de textos para calcular y otras representaciones de la vida real,
- traducir de una representación a otra,
- representar números hasta 1 000 000 de distintas maneras y relacionarlas,
- orientarse en el ámbito de los números hasta 1 000 000 (por ejemplo, ordenar números según su tamaño, redondear)

Planteamiento de la tarea:

Los números grandes se pueden representar mediante signos, sin usar cifras, por ejemplo así:



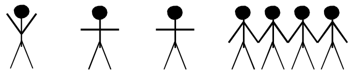
Tarea 1:

Al partido de fútbol del equipo Hamburger SV asistieron 43 000 espectadores. Representa el número con los signos indicados en la figura.

Tarea 2:

Escribe el número de habitantes. (AE I)

Ciudad de Cottbus:



Tarea 3:

Redondea a millares el número de habitantes de Dortmund y dibuja sus signos. (AE II)

Dortmund: ______________________________

Tarea 4:

Munich tiene aproximadamente el doble de habitantes que Dormund.
Escribe el número de habitantes de Munich en cifras. (AE I)

Representa el número de habitantes de Munich con los signos de la figura.

2.1.4 Ejemplo 4: **Errores al calcular**

Enfoque: Números y operaciones

Referencia a los estándares:

- describir procedimientos propios, comprender caminos de solución y reflexionar entre todos al respecto,
- comparar distintos procedimientos de cálculo y evaluarlos, encontrar errores al calcular, explicarlos y corregirlos,
- comprender procedimientos escritos de la adición, sustracción y multiplicación; utilizarlos fluida y adecuadamente en tareas pertinentes.

Planteamiento de la tarea:

Tarea 1:

Resuelve las siguientes tareas: (AE I)

	1	3	7	6	0	9				1	0	9	5	2	0			7	5	9	•	5	2		
+	3	4	5	2	9	1			–		7	5	7	1	8										

Tarea 2:

Kristina está en cuarto grado y ha calculado así:

	1	3	7	6	0	9				1	0	9	5	2	0			7	5	9	•	5	2		
+	3	4	5	2	9	1			–		7	5	7	1	8					3	7	9	5		
	4	8	2	8	0	0				2	3	3	8	0	2					1	5	1	8		
																				5	3	1	3		

Compara con tu resultado.

Marca los errores que cometió Kristina al calcular. (AE II)

Tarea 3:

Has marcado los errores.

Escribe qué hizo mal Kristina. (AE III).

en la adición: ____

en la sustracción: ____

en la multiplicación: ____

2.1.5 Ejemplo 5. **Cubo**

Enfoque: Espacio y forma

Referencia a los estándares:

- utilizar conocimientos matemáticos, destrezas y capacidades al trabajar tareas con contenido problemático,
- reconocer relaciones, utilizarlas y transferirlas a fenómenos semejantes,
- reconocer relaciones espaciales, describirlas y utilizarlas (correspondencias, recorridos, planos, perspectivas),
- establecer relaciones entre representaciones bi y tridimensionales de construcciones (por ejemplo, construir de acuerdo a un plano, dibujar un plano para construcciones que ya están hechas, examinar modelos de aristas y desarrollo de cuerpos geométricos)

Planteamiento de la tarea:

Tarea 1:

¿Cuántos lados, esquinas y aristas tiene un cubo? (AE I)

lados

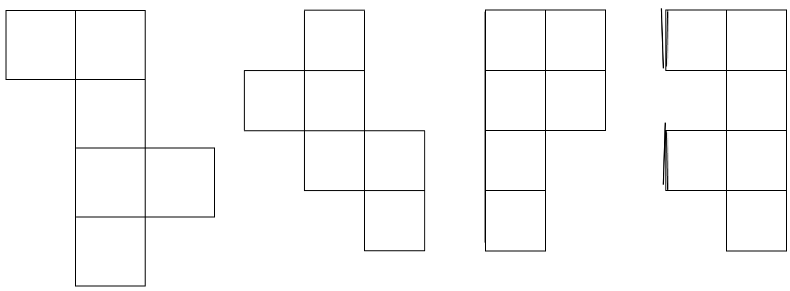
esquinas

aristas

Tarea 2:

¿Cuáles de estas figuras muestran desarrollos de cubos? ¡Márcalas! (AE II)

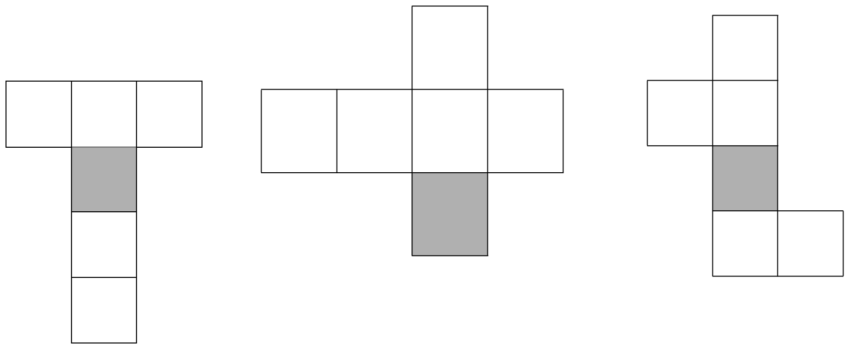
O **O** **O** **O**



Tarea 3:

Cada uno de los desarrollo de cubos tiene un lado pintado.

Pinta el lado opuesto en cada caso. (AE II)

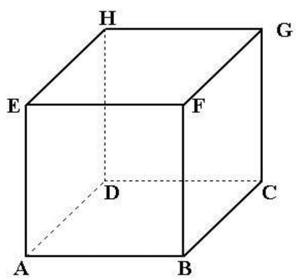


Tarea 4:

Aquí hay un cubo construido con palitos. El escarabajo Anton está sentado en la esquina A. El escarabajo Gustav está sentado en la esquina G. Anton quiere visitar a Gustav yendo por el camiino más corto. Él solamente puede caminar sobre los palitos.

Un camino posible para el escarabajo es: A → B → F → G

Escribe todas las otras posibilidades. (AE III)



2.1.6 Ejemplo 6: **Construcciones de cubos**

Enfoque: Espacio y forma

Referencia a los estándares:

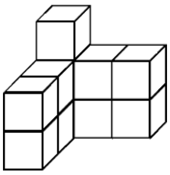
- utilizar conocimientos matemáticos, destrezas y capacidades al trabajar tareas con contenido problemático,
- trasducir una representación en otra
    - disponer de imaginacion especial,
    - establecer relaciones entre representaciones bi y tridimensionales de construcciones (por ejemplo, construir de acuerdo a un plano, dibujar un plano para construcciones que ya están hechas, examinar modelos de aristas y desarrollo de cuerpos geométricos)

Planteamiento de la tarea:

Wilhelm ha construido con cubos de madera.

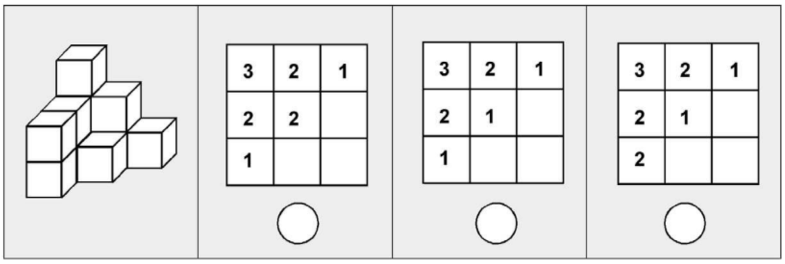
Tarea 1:

¿De cuántos cubos se compone esta construcción? (AE II)



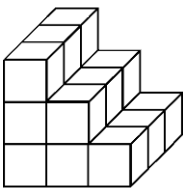
Tarea 2:

¿Cuál es el plano de construcción correspondiente? Márcalo. (AE II)



Tarea 3:

¿Cuántos cubos más pequeños necesitas como mínimo para completar la construcción de modo que forme un cubo grande?



2.1.7 Ejemplo 7: Triángulos

Enfoque: Espacio y forma

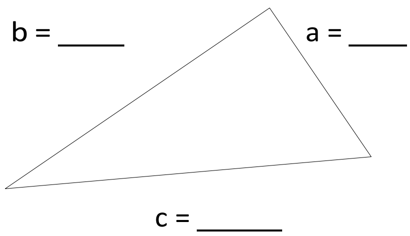
Referencia a los estándares:

- desarrollar estrategias de solución y utilizarlas (por ejemplo, probar sistemáticamente)
  - elaborar dibujos con medios auxiliaries y también a mano alzada
  - comparar magnitudes, medirlas y estimarlas.

Planteamiento de la tarea:

Tarea 1:

¿Cuánto miden los lados del triángulo? (AE I)

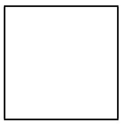


Tarea 2:

Dibuja un triángulo rectángulo usando el geotriángulo (AE I)

Tarea 3:

Descompón el cuadrado en 4 triángulos iguales.



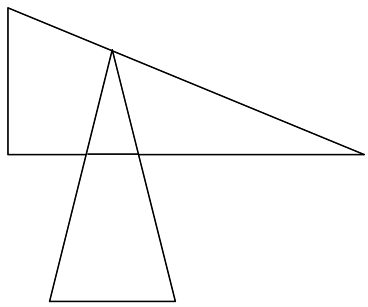
¿Existen otras posibilidades? Haz un bosquejo (AE II)

Tarea 4:

Descompón este rectángulo en cuatro cuadrados iguales.

Tarea 5:

En la figura hay dos triángulos que tienen exactamente tres puntos en común.



Dibuja dos triángulos que tengan exactamente:

a) 1 punto en común
b) 2 puntos en común
c) 4 puntos en común

(Bosquejo). (AE III)

2.1.8 Ejemplo 8: **Patrones de cinta**

Enfoque: Patrones y estructuras

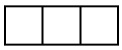
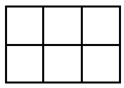
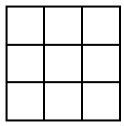
Referencia a los estándares:

- reconocer relaciones matemáticas y desarrollar suposiciones,
- buscar fundamentaciones y comprenderlas,
- desarrollar, elegir y utilizar representaciones adecuadas al trabajar con problemas matemáticos,
    - reconocer regularidades en patrones geométrics y aritméticos (por ejemplo, secuencias de números, o tareas estructuradas en secuencia), describirlas y continuarlas,

Planteamiento de la tarea:

Tarea 1:

Este patrón empieza con una fila de tres. Dibuja la imagen 4. (AE I).

Imagen 1	Imagen 2	Imagen 3	Imagen 4
			

Tarea 2:

Determina el número de casillas de la imagen 15 sin dibujarla. (AE II)

Tarea 3:

Jens continua dibujando ese patrón. ¿Podría ocurrir que, de esta manera, él complete una imagen que tenga exactamente 125 casillas? (AE II)

SÍ ☐ NO ☐

Fundamentación: ____

Tarea 4:

El patrón de Lisa comienza con una fila de tres como en la tarea 1. Michael empieza con una fila de cuatro. Ellos notan que algunas imágenes tienen igual cantidad de casillas. ¿Cuántas casillas tienen esas imagenes? Escribe cuatro posibilidades. (AE III).

2.1.9 Ejemplo 9: Tablero del 100

Enfoque: Patrones y estructuras

Referencia a los estándares:

- cuestionar declaraciones matemáticas y probar su corrección,
- reconocer relaciones matemáticas y desarrollar suposiciones,
- buscar fundamentaciones y comprenderlas,
- comprender representaciones estructuradas de números (por ejemplo, el tablero del 100) y utilizarlas,
    - reconocer regularidades en patrones geométricos y aritméticos (por ejemplo, en secuencias de números o en secuencias de tareas estructuradas) describirlas y continuarlas.

Planteamiento de la tarea:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tarea 1:

Suma los números que están uno junto al otro (AE I)

| 66 | 67 |

Suma: ☐

Tarea 2:

Suma los números que están uno debajo del otro. (AE I)

| 89 |
| 99 |

Suma: ☐

Tarea 3:

Martín ha sumado dos números que están uno junto al otro:

Suma: 53 ¿Cómo se llaman ambos números?

Tarea 4:

Sonja ha sumado dos números que están uno debajo del otro: (AE II)

Suma: 53 ¿Cómo se llaman ambos números? ☐ ☐

Tarea 5:

Helene afirma: “La suma de dos números uno junto al otro nunca pueden formar un número par” (AE III)

¿Es cierto? Sí ☐ No ☐

Fundamentación: ____

Tarea 6:

Calcula la suma de tres números consecutivos. (AE III)

4	5	6	Suma:	
7	8	9	Suma:	
14	15	16	Suma:	

Compara las sumas con el número del medio. ¿Qué observas?
¡Fundamenta! ____

2.1.10 Ejemplo 10: Agua

Enfoque: Magnitudes y medir

Referencia a los estándares:

- obtener información relevante de textos para calcular y otras representaciones de la vida real,
- traducir problemas del contexto al lenguaje de las matemáticas, resolverlos intramatemáticamente y relacionar dichas soluciones con la situación de inicio,
- traducir de representación a otra,
    - resolver tareas del contexto con magnitudes.

Planteamiento de la tarea:

Consumo promedio de agua por persona/por día

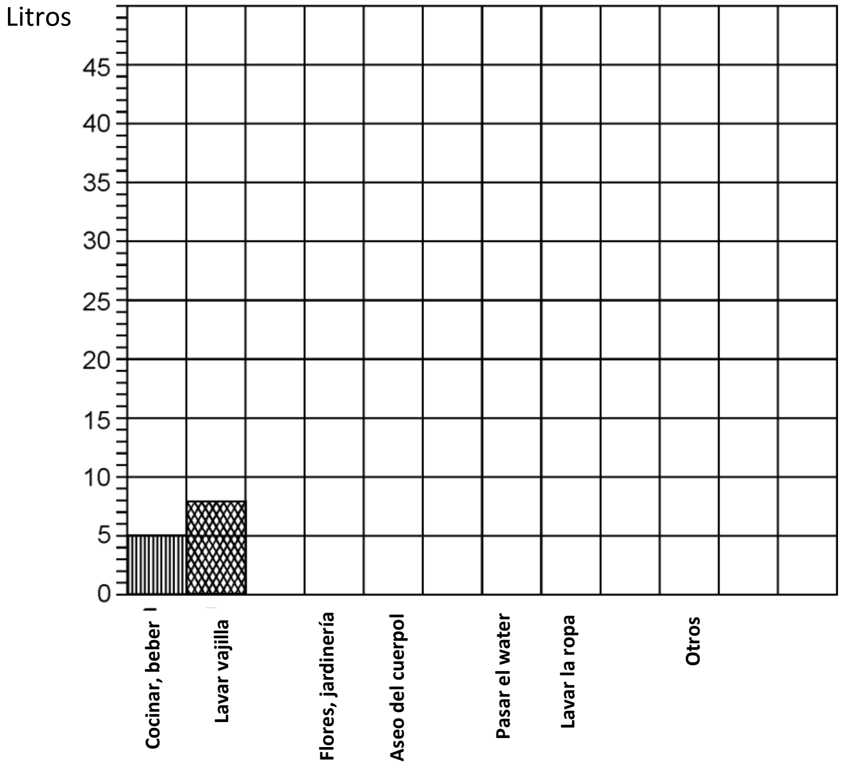
Cocinar, beber	5 litros	Aseo del cuerpo	49 litros
Lavar la vajilla	8 litros	Pasar el water	35 litros
Flores, jardinería	5 litros	Lavar la ropa	49 litros
		Otros	7 litros

Tarea 1:

¿Cuántos litros de agua necesita una persona en promedio en un día para el aseo del cuerpo y lavar la ropa? (AE I)

Tarea 2:

Completa el diagrama de barras. (AE II)



¿Cuántos litros de agua en total necesita una persona...(AE I)

- en un día?
- en una semana?

Tarea 3:

La familia Meister regresa a casa luego de 3 semanas de vacaciones. Ute descubre que un caño del baño gotea. Ella coloca un balde de 5 litros bajo el caño que gotea. Luego de 6 horas el balde está lleno. ¿Cuántos litros de agua se habrán desperdiciado durante las vacaciones? (AE III)

2.1.11 Ejemplo 11: Jardín

Enfoque: Magnitudes y medir

Referencia a los estándares:

- obtener información relevante de textos para calcular y otras representaciones de la vida real,
- traducir problemas del contexto al lenguaje de las matemáticas, resolverlos intramatemáticamente y relacionar las soluciones con la situación de inicio,
  - comprender procedimientos escritos de la adición, sustracción y multiplicación, utilizarlos fluida y adecuadamente en tareas pertinentes,
  - calcular medidas aproximadas en situaciones del contexto, estimar magnitudes fundamentadamente.

Planteamiento de la tarea:

La familia Blum cosechó cerezas en su jardín durante una semana:

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
9,500 kg	0 kg	8,250 kg	9,600 kg	6,200 kg	7,800 kg	0 kg

Tarea 1:

Calcula la cantidad total! (AE I)

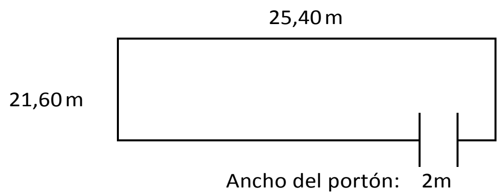
Tarea 2:

Uwe calcula rápidamente en su cabeza y afirma que la familia Blum cosechó en esa semana aproximadamente 42 kg de cerezas.

¿Cómo calculó? (AE II)

Tarea 3:

La familia Blum quiere cercar su jardín con malla metálica. La señora Blum mide las longitudes y dibuja un bosquejo.



En la ferretería se ofrecen rollos con malla metálica de 25 m de longitud.

Cuántos rollos debe comprar el señor Blum? (AE II)

2.1.12 Ejemplo 12: Hornear tortas

Enfoque: Magnitudes y medir

Referencia a los estándares:

- utilizar conocimientos matemáticos, destrezas y capacidades al trabajar tareas de contenido problemático,
- obtener información relevante de textos para calcular y otras representaciones de la vida
- desarrollar, seleccionar y utilizar representaciones adecuadas para trabajar problemas matemáticos,
    - conocer unidades de medida estándar en los ámbitos dinero, longitudes, periodos de tiempo, masa y volumen,
    - resolver tareas de context relacionadas con magnitudes.

Planteamiento de la tarea:
El salón de cuarto grado A quiere preparar una torta para la feria escolar.
Los niños consultan la receta en el libro de repostería.

Ingredientes para la torta (un molde):

Para la masa:	*Para decorar:*	*Para espolvorear:*
200 g de margarina	1 clara de huevo	40 g de almendra picada
250 g de azúcar	1 cucharada de leche	
3 huevos		
350 g de harina		
100 g de maicena		
1 sobrecito de polvo de hornear		

Tarea 1:

¿Cuánto de cada ingrediente necesitan los niños? (AE I)

Anota en la tabla:

Ingredientes	Margarina	Azúcar	Huevos	Maicena	Polvo de hornear	Leche	Almendras
1 molde							

Tarea 2:

¿Cuánto de cada ingredientes necesitan los niños para cuatro moldes?

Anota en la tabla:

Ingredientes	Margarina	Azúcar	Huevos	Maicena	Polvo de hornear	Leche	Almendras
4 moldes							

Tarea 3:
Todavía falta comprar en el supermercado: margarina, huevos, polvo de hornear y almendras.

10 huevos
1,39 €

3 sobres
0,29 €

500 g
0,89 €

Almendras
100 g
0,49 €

- ¿Cuántos paquetes de cada tipo tienen que comprar, para hornear 4 moldes?

  Cuánto cuestan los ingredientes? (AE II)
  Completa la tabla:

Compras	Margarina	Huevos	Polvo de hornear	Almendras
Precio unitario				
Cantidad de paquetes				
Pecio total				

Tarea 4:
Los moldes para hornear de la cocina del colegio tienen 32 cm de ancho y 40 cm de largo. Los niños cortan las tortas en porciones de 8 cm de ancho y 10 cm de largo. Prepara un bosquejo. (AE II).

Cuántas porciones obtienen de un molde? ☐ porciones

Cuántas porciones obtienen de las 4 moldes? ☐ porciones

2.1.3 Ejemplo 13: Tablas y diagramas

Enfoque: Datos, frecuencia y probabilidad

Referencia a los estándares:

- traducir de una representación a otra,
- comparar y evaluar representaciones entre sí,
    - recolectar datos en observaciones, sondeos y experimentos sencillas, estructurarlos y representarlos en tablas, diagramas y dibujos.
    - obtener información de tablas, diagramas y dibujos.

Planteamiento de la tarea:

La tabla muestra la edad de los varones y mujeres de cuarto grado de primaria.

Edad	Cantidad de varones	Cantidad de mujeres
9	6	8
10	9	3
11	2	0

Tarea 1:

Cuántos varones hay en el cuarto grado? (AE I)

Tarea 2:

Cuántos estudiantes pertenecen al cuarto grado? (AE I)

Tarea 3:

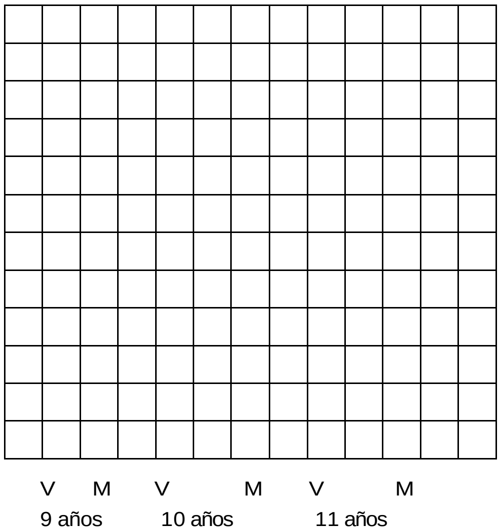
Cuántos niños tienen 9 años? (AE I)

Tarea 4:

Cuántos estudiantes tienen más de 9 años? (AE I)

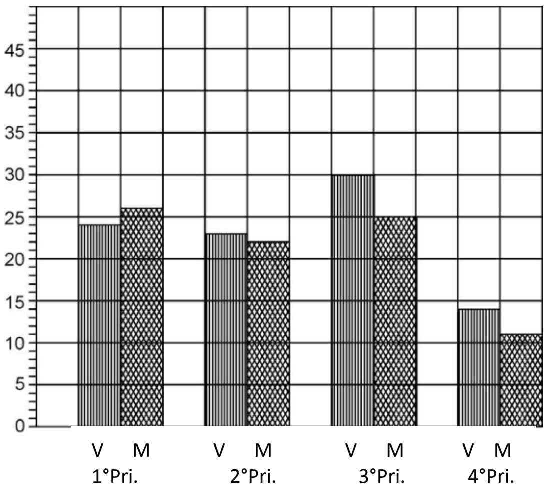
Tarea 5:

Dibuja un diagrama de barras para la tabla (AE II).



Tarea 6:

El diagrama representa la cantidad de varones (V) y mujeres (M) del colegio Wald. (AE II)



Completa la tabla con la información del diagrama.

Grado	Varones	Mujeres	Total
1° Primaria			
2° Primaria			
3° Primaria			
4° Primaria			
Total			

2.1.15 Ejemplo 15: Cubos

Enfoque: Datos, frecuencia y probabilidad

Referencia a los estándares:

- desarrollar estrategias de solución y utilizarlas (por ejemplo, probar sistemáticamente),
- reconocer relaciones y desarrollar suposiciones,
    - estimar los chances de ganar en experimentos simples del azar (por ejemplo, juegos de dados)
    - conocer conceptos básicos (cierto, imposible, probable).

Planteamiento de la tarea:

Tarea 1:

En un dado la suma de los números en las caras opuestas da siempre 7. (AE I)

Entonces,…

3	se encuentra en el lado opuesto de	
	se encuentra en el lado opuesto de	
	se encuentra en el lado opuesto de	

Tarea 2:

Imagínate que lanzas el dado 5 veces y sumas los números. (AE II)

La menor suma posible es:________________

La mayor suma posible es:________________

Tarea 3:

Imagínate que lanzas dos dados.

En cada lanzamiento sumas los números que obtuviste en ambos dados.

¿Qué sumas son posibles?

Escríbelas todas.

____

Tarea 4:

Al lanzar dos dados la suma 7 es bastante más frecuente que la suma 12.

¿A qué se debe esto? (AE III)

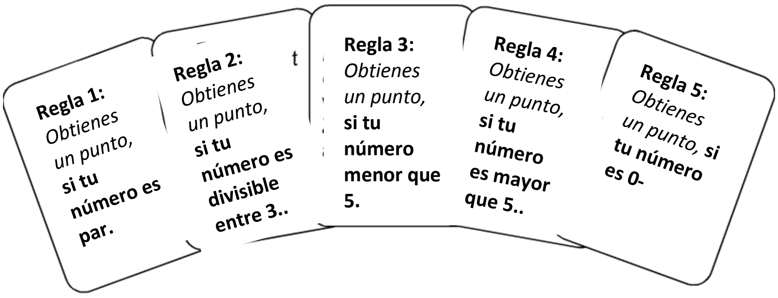
____

____

____

Tarea 5:

Estás jugando con un dado, con unos amigos.
Cada jugador puede elegir una regla según la cual obtendrá un puntaje.



Quieres obtener la mayor cantidad de puntos posible.
¿Qué regla elegirías?

____

¿Por qué?

____

____

____

Nota: El punto 2.2 es una traducción del punto 4. *Aufgabenbeispiele* del documento oficial sobre estándares de aprendizaje matemáticas (KMK,2003) pp. 13 a 36.

2.2 Ejemplos de tareas - Cuarto grado de Secundaria

- **Ámbitos de exigencia**

Para resolver tareas matemáticas, se utilizarán *las competencias matemáticas generales* de distintas maneras. Correspondientemente, se diferencian tres ámbitos de exigencia: reproducir, establecer relaciones, así como generalizar y reflexionar. En general, la exigencia y la complejidad cognitiva aumentan al pasar de un ámbito de exigencia a otro. Los ámbitos de exigencia para *las competencias matemáticas generales* tienen las siguientes características:

Ámbito de exigencia I: Reproducir. Este ámbito de exigencia engloba la aplicación directa de conceptos básicos, de enunciados y procedimientos dentro de un campo delimitado y en circunstancias repetidas.

Ámbito de exigencia II: Establecer relaciones. Este ámbito de exigencia engloba el trabajo con contenidos relacionados al contexto; los cuales entrelazan conocimientos, destrezas y capacidades, previamente adquiridos en el manejo de distintos campos de las matemáticas.

Ámbito de exigencia III: Generalizar y reflexionar. Este ámbito de competencia engloba el trabajo con hechos complejos; entre otras, con la meta de lograr formular problemas, soluciones, fundamentaciones, deducciones, interpretaciones o valoraciones propios

La siguiente tabla establece una diferenciación de *las competencias matemáticas generales* en los tres ámbitos de exigencia. Con ayuda de la tabla, se puede analizar el procesamiento de una tarea matemática, para determinar qué competencias y qué ámbito de exigencia (AE) requiere.

Tabla 2

Reproducir (AE I)	Establecer relaciones (AE II)	Generalizar y reflexionar (AE III)
Argumentar matemáticamente. Incluye:		
• dar argumentaciones rutinarias familiares como: cálculos,…	• explicar o desarrollar argumentaciones de varios pasos de manera entendible • describir y argumentar procesos	• explicar o desarrollar argumentaciones complejas
• argumentar usando conocimientos de la vida cotidiana	• evaluar resultados en su contexto de aplicación • explicar relaciones, ordenamientos y estructuras	• formular preguntas características de las matemáticas y fundamentar demostraciones de terceros • evaluar distintas argumentaciones
Resolver problemas matemáticamente. Incluye:		
• resolver problemas rutinarios (“saber ayudarse”) • solucionar problemas simples con procedimientos conocidos (también experimentales)	• trabajar problemas cuya solución requieren el uso de medios heurísticos, estrategias y principios • formular problemas propios • comprobar la plausibilidad de los resultados obtenidos	• trabajar problemas exigentes • reflexionar sobre el hallazgo de ideas y procesos de solución
Modelar matemáticamente. Incluye:		
• utilizar modelos familiares y reconocibles directamente • relacionar objetos matemáticos con la experiencia cotidiana • comprobar resultados en el contexto	• realizar modelamientos que requieren de varios pasos • interpretar los resultados de un modelamiento y probarlos en la situación de origen • relacionar un modelo matemático con la correspondiente situación	• modelar situaciones complejas o no familiares • reflexionar y juzgar críticamente modelos matemáticos utilizados, tales como fórmulas, ecuaciones, representaciones de correspondencias, dibujos, representaciones estructuradas, programas
Utilizar representaciones matemáticas. Incluye:		
• usar o completar representaciones de objetos matemáticos en situaciones familiares	• reconocer relaciones entre distintas formas de representación y alternar entre ellas	• desarrollar representaciones propias • juzgar distintas formas de representación según su propósito • interpretar y valorar la fuerza expresiva de representaciones no familiares

Reproducir (AE I)	Establecer relaciones (AE II)	Generalizar y reflexionar (AE III)
Manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de la Matemática. Incluye:		
• utilizar procedimientos rutinarios • manejar fórmulas y símbolos familiares • utilizar instrumentos matemáticos, como: colecciones de fórmulas, calculadora, software, en situaciones en cuyo uso se ha ejercido la práctica previamente	• desarrollar procedimientos de solución y de verificación • traducir lenguaje simbólico y formal a lenguaje natural y viceversa • trabajar con variABles, expresiones algebraicas, ecuaciones, funciones, tablas y diagramas • seleccionar y emplear comprensivamente instrumentos matemáticos	• evaluar procedimientos de solución y verificación según su eficiencia • reflexionar sobre las alternativas y límites del uso de instrumentos matemáticos
Comunicar. Incluye:		
• expresar contenidos matemáticos sencillos del entorno oralmente y por escrito • deducir información de textos, gráficos e ilustraciones matemáticas cortas y sencillas • reaccionar a preguntas y críticas de manera objetiva y adecuada	• describir de forma clara reflexiones, procedimientos de solución y resultados • captar la esencia de textos, gráficos e ilustraciones matemáticas complejos • utilizar adecuadamente • el lenguaje especializado de la disciplina • interactuar con expresiones de terceros de contenido matemático • manejar los errores constructivamente	• captar la esencia de textos matemáticos complejos • juzgar expresiones de tercero sobre temas matemáticos

2.2.1 Ejemplo 1: ¿Conviene tomar el desvío?

<u>Planteamiento de la tarea:</u>

Al viajar de A a B, muchos conductores prefieren no utilizar la avenida principal, que es muy transitada, sino un desvío. (Ver Fig 1.)

Exprese usted si el desvío significa un ahorro de tiempo, considerando que en el desvío se puede transitar a una velocidad de 30 km/h, mientras que por la avenida principal la velocidad permitida es de 50 km/h .

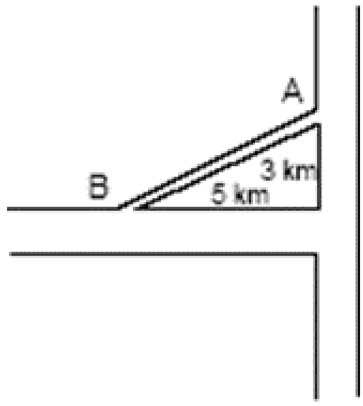


Fig. 1

<u>Descripción de la tarea y su objetivo:</u>
Al trabajar la tarea, los/as estudiantes comprueban en qué medida han logrado la *competencia general*:
- *argumentar matemáticamente* (C 1);

en el marco de la idea directriz *medir* (ID 2).
Está permitido el uso de una calculadora y colección de formulas.

La tarea se puede ampliar mediante la siguiente pregunta:
“¿A partir de qué velocidad valdría la pena tomar el desvío?

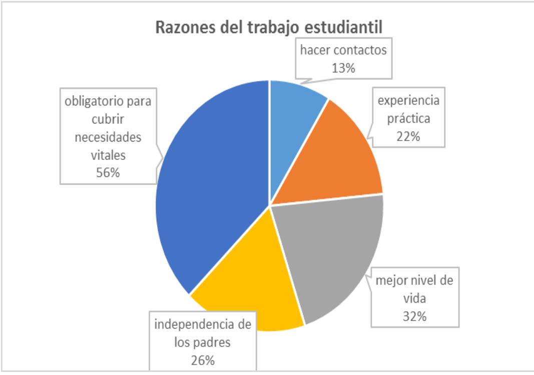
<u>Esquema de solución con indicaciones de las ideas directrices y las competencias matemáticas generales, así como su relación con los ámbitos de exigencia:</u>

	Solución y observaciones	Idea directriz	Ámbito de exigencia		
			I	II	III
	– Comparación del tiempo requerido: 1) Atajo por el camino angosto longitud: l_1 6 km tiempo: aproximado 12 min 2) Avenida principal lontitud: l_s= 8 km tiempo: aproximado 10 min – Usar el desvío no representa ningún ahorro de tiempo.	ID 2		C 1	

Ejemplo 2: ¿Por qué trabajan los estudiantes?

<u>Planteamiento de la tarea:</u>

a) El diagrama de la Fig 2 muestra las respuestas a la pregunta: ¿Por qué trabajan los estudiantes?
   Se asume que 2 000 estudiantes respondieron la encuesta.
   ¿Cuántos de ellos respondieron: *obligatorio para cubrir necesidades vitales?*



Fuente: Periódico Die Zeit 15 07 1999 Fig.2

b) Edeltraut afirma: -“Parece que a los estudiantes no les va tan mal, pues solo alrededor de un tercio tiene que trabajar para mantenerse” Monika refuta: -“¡No es así!”
   ¿Cómo llegó cada uno a su conclusión?
   Haga una representación gráfica que evite esta divergencia de opiniones .
c) Explique cómo ha procedido el autor al crear el diagrama.

<u>Descripción de la tarea y su objetivo:</u>

Se trata de una tarea compleja, referida a la realidad, correspondiente al ámbito de la estadística descriptiva. Al trabajar la tarea, los/as estudiantes comprueban en qué medida han logrado, sobre todo, las *competencias matemáticas generales*:

- *argumentar matemáticamente (C 1) y*
- *utilizar representaciones matemáticas (C 4);*

en el marco de la idea directriz *datos y azar* (ID 5)

Esquema de solución con indicaciones de las ideas directrices y las competencias matemáticas generales, así como su relación con los ámbitos de exigencia:

	Soluciones y observaciones	Idea directriz	Ámbito de exigencia		
			I	II	III
a)	Del diagrama circular se desprende que el 56% de los/as estudiantes encuestados requiere realizar trabajo remunerado *obligatorio para cubrir sus necesidades vitales.* De los 2 000 encuestados, esto significa que 1 120 estudiantes marcaron *obligatorio para*…	ID 5	C 4		
b)	Edeltraud, al declarar, solamente prestó atención a la correspondiente porción del área del diagrama circular Mónika fundamentó su declaración con el dato numérico. Una alternativa de representación gráfica adecuada sería un diagrama de barras.	ID 5 ID 5	C 1	 C 4	
c)	Él sumó los porcentajes y obtuvo 149% (al observar que era possible dar más de una opción como respuesta). Este número representa el total del área circular, es decir 360° .Él hizo corresponder, por ejemplo, el porcentaje 56% con el ángulo del punto medio de la circunferencia: $\frac{56}{149} \bullet 360°$ Procedió de manera análogo con los demás porcentajes .	ID 5		C 1	

2.2.3 Ejemplo 3: De estrella a pirámide

<u>Planteamiento de la tarea:</u>

La estrella simétrica ilustrada en la Fig 3 tiene las siguientes propiedades:

Todos los lados y también los segmentos AC y CE tienen la misma longitud = a. AC es perpendicular a CE .

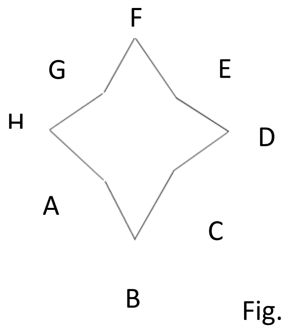


Fig. 3

a) ¿Cuántos ejes de simetría tiene la estrella?
b) Describa una construcción de la estrella.
c) Las caras de los triángulos se doblan para formar una pirámide. Determine el volumen de la pirámide para a=5,0 cm.
d) La estrella se modifica hasta que los segmentos AC y AB ya no tienen la misma longitud. Sin embargo, la simetría de la estrella se mantiene. ¿Bajo qué condiciones puede formarse una pirámide al doblar los triángulos?

<u>Descripción de la tarea y su objetivo:</u>

El Enfoque de contenido es el tratamiento con figuras geométricas y sus propiedades.
Al trabajar la tarea, los/as estudiantes comprueban en qué medida han logrado, sobre todo, las *competencias matemáticas generales*:

- *argumentar matemáticamente (C 1),*
- *resolver problemas matemáticamente (C 2),*
- *utilizar representaciones matemáticas (C 4) y*
- *comunicar (C 6);*

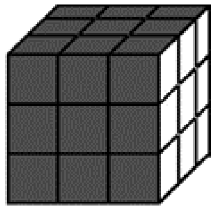
en el marco de la idea directriz *espacio y forma* (ID 3), así como *medir* (ID 2).
Está permitido el uso de medios auxilares como colección de fórmulas y calculadora.

Esquema de solución con indicaciones de las ideas directrices y las competencias matemáticas generales, así como su relación con los ámbitos de exigencia:

	Soluciones y observaciones	Idea directriz	Ámbito de exigencia		
			I	II	III
a)	Número de ejes de simetría: 4.	ID 3	C 4		
b)	La descripción de la construcción contiene los siguientes puntos: – construcción del cuadrado ACEG, – construcción de los cuatro triángulos equiláteros. (Existen otras alternativas de construcción).	ID 3		C 6	
c)	– Reconocen que el cuadrado es la base de la pirámide. – Nombran las partes necesarias para determinar el volumen: a, lado del cuadrado; h_t, altura del triángulo; h_p, altura de la pirámide. – Elaboran el triángulo auxilar a partir a/2; h_t y h_p – Determinación del volume $V=29{,}5\ cm^3$ (Existen otras posibilidades de solución con ayuda de un triángulo sobre una diagonal del cuadrado).	ID 2		C 2	
d)	Indicación de una de ambas propiedades: – La altura hacia la base del triángulo equilátero es mayor que la mitad la longitud de los lados del cuadrado. – La longitud de una de las aristas del triángulo es mayor que la mitad de la diagonal del cuadrado .	ID 3			C 1

2.2.4 Ejemplo 4: Cubo

<u>Planteamiento de la tarea:</u>



Cinco lados de un cubo de 3 cm de arista están pintados de rojo, el sexto lado no fue pintado.

a) ¿Qué porcentaje de la superficie del cubo es rojo?

El cubo se descompone en cubos parciales de 1 cm de arista. Estos cubos parciales se colocan en un recipiente del que, luego, serán extraídos con los ojos cerrados.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el cubo extraído tenga ninguna, exactamente una (dos, tres, cuatro) superficie(s) roja(s)?

<u>Descripción de la tarea y su objetivo:</u>

Al trabajar la tarea, los/as estudiantes comprueban en qué medida han logrado, sobre todo, las *competencias matemáticas generales*:

- *resolver problemas matemáticamente (C 2) y*
- *modelar matemáticamente (C 3);*

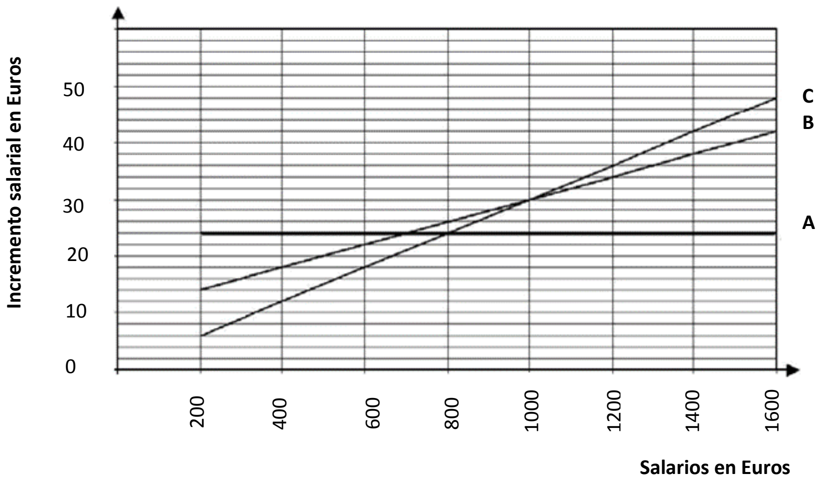
en el marco de la idea directriz *medir* (ID 2), *espacio y forma* (ID 3) y *datos y azar* (ID 5)

<u>Esquema de solución con indicaciones de las ideas directrices y las competencias matemáticas generales, así como su relación con los ámbitos de exigencia:</u>

	Soluciones y observaciones	Idea directriz	Ámbito de exigencia		
			I	II	III
a)	Aproximadamente el 83% de la superficie del cubo es roja.	ID 2	C 3		
b)	X: número de superficies pintadas de un cubo parcial P(X=0) = 2/27; P(X=1) = 9/27 P(X=2) = 12/27 P(X=3) = 4/27 P(X=4) = 0/27	ID 3, ID 5		C 2	

2.2.5 Ejemplo 5: Incremento salarial

Planteamiento de la tarea:



El gráfico muestra tres modelos distintos de incremento salarial (Modelo A, Modelo B y Modelo C)

a) Ordene en una tabla los incrementos salariales de los distintos modelos segun el salario.
b) Elabore otro gráfico que represente la relación entre el salario (en €) y el incremento salarial (en %) para los distintos modelos.
c) Ambos gráficos representan la misma situación. Uno de ellos debe aparecer en una publicación (por ejemplo, en un artículo periodístico). ¿Cuál escogería usted, si quisiera impulsar el modelo A? Fundamente su elección.

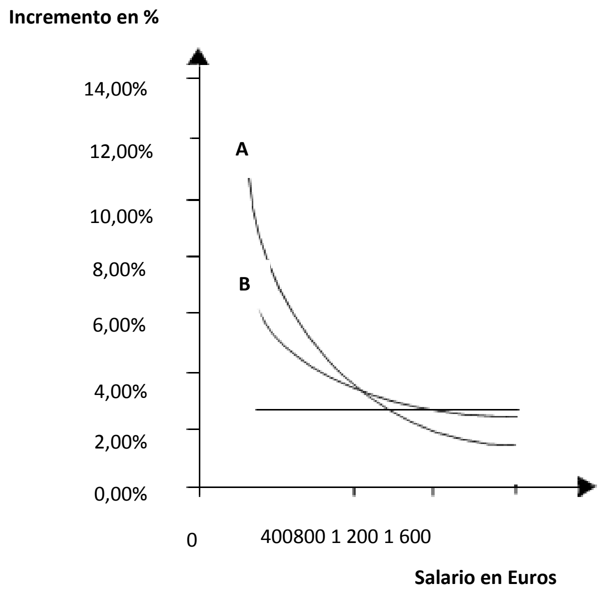
Descripción de la tarea y su objetivo:

La tarea require un manejo crítico de los gráficos Las distintas fundamentaciones contienen aspectos que van más allá del mismo curso. Al trabajar la tarea, los/as estudiantes comprueban en qué medida han logrado, sobre todo, las *competencias matemáticas generales*:

- *argumentar (C 1),*
- *utilizar representaciones matemáticas (C 4);*

en el marco de la idea directriz *relación funcional* (ID 4).
Se permite el uso de la calculadora.

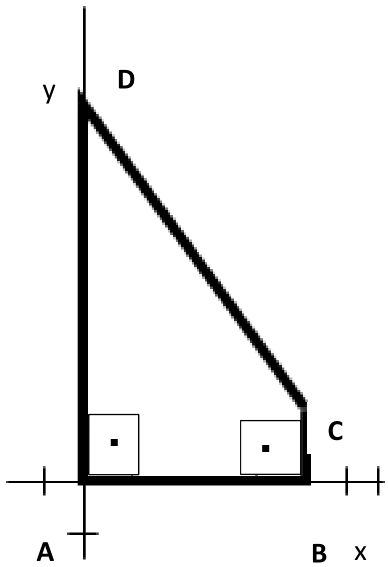
Esquema de solución con indicaciones de las ideas directrices y las competencias matemáticas generales, así como su relación con los ámbitos de exigencia

	Soluciones y observaciones	Idea directriz	Ámbito de exigencia		
			I	II	III
a)	Elaborar la tabla	ID 4	C 4		
b)	Calcular el incremento salarial en %, elaborar la tabla y el gráfico.  	ID 4		C 4	
c)	Dependiendo de la expresión utilizada, ambas fundamentaciones son válidas: - Si se debe expresar que los grupos con menor salario serán los más beneficiados, se debe elegir el gráfico con incrementos salariales porcentuales. - Si se debe reflejar que todos obtienen igual incremento salarial, se debe elegir el gráfico dado.	ID 4			C 1

2.2.6 Ejemplo 6: Rectángulo en el trapecio

<u>Planteamiento de la tarea:</u>

El trapecio ABC ilustrado en la figura ha sido insertado en un plano de coordenadas con los puntos A(0 ; 0), B(8 ; 0), C(8 ; 3) y D(0 ; 15). Cada punto del lado CD del trapecio es vértice de un rectángulo inscrito en el trapecio. Los lados de los rectángulos inscritos son paralelos a los ejes del plano de coordenadas. El punto A es vértice de uno de dichos rectángulos.



a) Calcule el área del trapecio ABCD.
b) El punto P(2 ; y) está en el lado CD; y, por lo tanto, es vértice de un rectángulo inscrito. Inserte el respectivo rectángulo en la figura y determine su área.
c) Al desplazarse el punto P(y ; x) sobre el segmento CD, se altera el área F del rectángulo correspondiente.
   Fundamente que el área F puede ser calculada mediante la ecuación
   F = x ● (-1,5 x + 15), en donde x es la primera coordenada del punto P.
d) Determine el rectángulo inscrito que tiene el área mayor. Fundamente su procedimiento.

<u>Descripción de la tarea y su objetivo:</u>

La tarea conlleva un planteamiento intramatemático, cuyo contenido enlaza los ámbitos de las funciones y la geometría. Se puede variar de la siguiente manera: Determine un rectángulo inscrito cuya área mida 31,5 unidades e indique su posición en el trapecio.

Al trabajar la tarea, los/as estudiantes comprueban en qué medida han logrado, sobre todo, las competencias matemáticas generales:

- *argumentar matemáticamente* (C 1),
- *resolver problemas matemáticamente* (C 2), y
- *manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las mate* (C 5);

en el marco de la idea directriz *medir* (ID 2), *espacio y forma* (ID 3) y *relación funcional* (ID 4) Se permite el uso de colección de fórmulas y calculadora.

Esquema de solución con indicaciones de las ideas directrices y las competencias matemáticas generales, así como su relación con los ámbitos de exigencia:

	Soluciones y observaciones	Idea directriz	Ámbito de exigencia		
			I	II	III
a)	Determinar el área (diversos caminos para resolver son posibles).	ID 2	C 5		
b)	Determinar el área (diversos caminos para resolver son posibles).	ID 3		C 5	
c)	El área F se obtiene del producto de las coordenadas del punto P F = *x* ● y. La coordenada y de P se calcula mediante y = (-1,5 x + 15).	ID 4			C 1
d)	Determinación del máximo de F(x): es possible hacerlo con ayuda del complemento cuadrático (quadratische Ergänzung) o por medio de la posición 0 de la parabola. La ubicación del rectángulo buscado puede ser descrita mediante el punto R(5 ;7 ,5) ó, también, S(5 ; 0). (Junto con el procedimiento de cálculo, también existen deliberaciones geométricas para la determinación del rectángulo buscado).	ID 4			C 2

2.2.7 Ejemplo 7: Volumen de madera extraíble

Planteamiento de la tarea:

El volume de madera extraíble de una parte del bosque es de 80 000 m^3 El bosque crece anualmente en 2,5% .

a) Calcule el volumen de madera extraîble dos años después.
b) Con ayuda de un programa de hoja de cálculo, represente el crecimiento del volumen de madera extraîble para los próximos 20 años. Para ello, utilice el siguiente formato de tabla:

	A	B	C	D
1	Número de años	Volumen de madera extraîble		
2	0	80000		
3				

¿En cuántos años se habrár duplicado el volumen de madera extraîble?

c) Para la tarea b), indique una alternativa para responder sin PC.
d) En realidad, el desarrollo del volumen de madera extraíble puede desviarse de lo calculado. Indique algunas razones para ello.

Descripción de la tarea y su objetivo:

Los/as estudiantes deben calcular porcentajes. La pregunta acerca de cuánto tiempo tomará el volumen de madera extraíble en duplicarse se puede responder de diversas maneras, ya que se basa en un algoritmo que se repite. Lo importante es la anticipación mental del camino de solución, para que luego el trabajo de cálculo pueda ser transferido a la calculadora. Al trabajar la tarea, los/as estudiantes comprueban en qué medida han logrado, sobre todo, las *competencias matemáticas generales*:

– *resolver problemas matemáticamente (C 2),*
– *modelar matemáticamente (C 3) y*
– *manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas (C 5),*

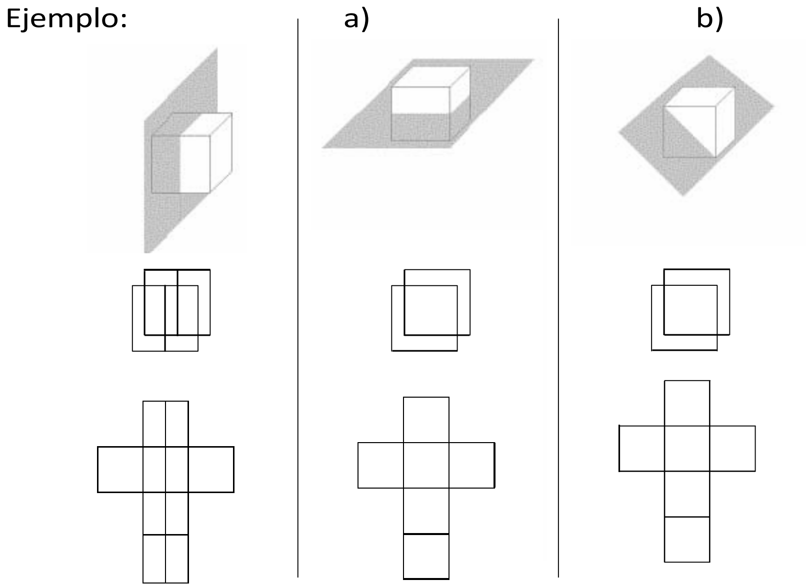
en el marco de la idea directriz *número* (ID 1) y *relación functional* (ID 4).
Se permite el uso de PC o calculadora.

Esquema de solución con indicaciones de las ideas directrices y las competencias matemáticas generales, así como su relación con los ámbitos de exigencia:

	Soluciones y observaciones	Idea directriz	Ámbito de exigencia I	II	III
a)	Volumen de madera extraíble dos años después: 84 050 m^3.	ID 4	C 2		
b)	Trabajo con el programa de hoja de cálculo: a los 29 años se sobrepasa por primera vez el valor de 160 000 m^3.	ID 1		C 5	
c)	Por ejemplo: $160\,0000 = 80\,000 \bullet 1{,}025^x$.	ID 4		C 2	
d)	Por ejemplo: el modelo supuesto (un crecimiento parejo durante un tiempo prolongado) es idealista.	ID 4		C 3	

2.2.8 Ejemplo 8: Representaciones de cubos

<u>Planteamiento de la tarea:</u>
Un cubo será cortado a través de los planos indicados.
Dibuje las aristas de corte, en la perspectiva y en el desarrollo del cubo, como en el ejemplo.



<u>Descripción de la tarea y su objetivo:</u>
El trabajo con la tarea demanda imaginación especial.
.Al trabajar la tarea, los/as estudiantes comprueban en qué medida han logrado, sobre todo, las *competencias matemáticas generales*:

– *utilizar representaciones matemáticas (C 4),*

en el marco de la idea directriz *espacio y forma.*

<u>Esquema de solución con indicaciones de las ideas directrices y las competencias matemáticas generales, así como su relación con los ámbitos de exigencia:</u>

Soluciones y observaciones	Idea directriz	Ámbito de exigencia		
		I	II	III
Trasladar el plano de corte a la perspectiva y al desarrollo del cubo.	ID 3		C 4	

2.2.9 Ejemplo 9: Pista de esquí

<u>Planteamiento de la tarea:</u>
En la localidad italiana de Bormio se realiza anualmente una competencia inaugural, en el marco de la Copa Mundial de Ski. El recorrido tiene en total 3 270 m de largo. El punto de inicio se encuentra a 2 255 m de altura, la meta está a 1 245 m de altura .
La pendiente máxima del recorrido es de 63% .

a) Calcule en km/h la velocidad promedio de un competidor que completó el recorrido en 1 minuto 54,23 segundos .
b) Explique qué significa *pendiente 63%.* Determine el ángulo que se forma entre el segmento de pendiente 63% y la horizontal.
c) Calcule la pendiente de la bajada de Bormio, si se asume que tiene la misma longitud pero el recorrido es en línea recta desde el inicio hasta la meta.

<u>Descripción de la tarea y su objetivo:</u>
.Al trabajar la tarea, los/as estudiantes comprueban en qué medida han logrado, sobre todo, las *competencias matemáticas generales*:

- *modelar matemáticamente (C 3),*
- *manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas (C 5),*
- *comunicar (C 6);*

en el marco de la idea directriz *medir* (ID 2), así como *espacio y forma* (ID 3) Se permite el uso de colección de formulas y calculadora.

<u>Esquema de solución con indicaciones de las ideas directrices y las competencias matemáticas generales, así como su relación con los ámbitos de exigencia:</u>

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Soluciones y observaciones</th><th rowspan="2">Idea directriz</th><th colspan="3">Ámbito de exigencia</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Determinar la velocidad promedio (103 km/h).</td><td>ID 2</td><td>C 5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Respuestas posibles: con ayuda del bosquejo de un triángulo rectángulo se explicará que la razón entre cateto opuesto y cateto adyacente es igual a 63 : 100 .

Enfoque de la respuesta: tan α = 0,63; dado α~ 32° .</td><td>ID 3

ID 2</td><td></td><td>C 6

C 3</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Determinar la pendiente media (32%).</td><td>ID 3</td><td></td><td>C 5</td><td></td></tr>
</table>

2.2.10 Ejemplo 10: Factorial

Planteamiento de la tarea:
El producto de todos los números naturales de 1 hasta *n* puede escribirse en forma abreviada:

Ejemplo: 1 ● 2 ● 3 ● 4 ● 5 = 5! (se dice: “factorial de cinco”).
En general: 1● 2 ● 3 ● 4…*n* = n! (se dice: “factorial de *n*”).

a) Calcule , sin usar calculadora 6!
b) Calcule , usando calculadora 20!
   ¿Cuántos dígitos tiene el número calculado?
c) ¿Con cuántos ceros termna el número 20!?
   Fundamentar y comparar con el resultado que da la calculadora.

Descripción de la tarea y su objetivo:
La tarea contiene un fenómeno intramatemático. Mediante el uso del “factorial” se pide que los/as estudiantes hagan una transferencia. La tarea ofrece la oportunidad de tematizar los límites de la calculadora a partir de un ejemplo.
Al trabajar la tarea, los/as estudiantes comprueban en qué medida han logrado, sobre todo, las *competencias matemáticas generales*:
- *argumentar matemáticamente (C 1),*
- *utilizar representaciones matemáticas (C 4) y*
- *manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas (C 5);*

en el marco de la idea directriz *número* (ID 1). Se permite el uso de la calculadora.
Con el mismo planteamiento, la tarea puede ser ampliada hasta 30!

Esquema de solución con indicaciones de las ideas directrices y las competencias matemáticas generales, así como su relación con los ámbitos de exigencia:

Soluciones y observaciones		Idea directriz	Ámbito de exigencia		
			I	II	III
a)	Calcular el producto sin calculadora: 6!=720	ID 1	C 5		
b)	Resultado dado por la calculadora: 2.4329020082e18, por tanto 19 dígitos.	ID 1	C 4		
c)	Los ceros al final del número se obtiene mediante los factores de diez y mediante los pares de factores, que dan el resultado 10 en cada caso. El número termina entonces en cuatro ceros, mientras que el resultado de la calculadora muestra ocho ceros. La calculadora, entonces, no ha mostrado un resultado exacto.	ID 1			C 1

Ejemplo 11: Tiempo en la escuela

Planteamiento de la tarea: Discuta sobre las expresiones de los/las estudiantes

Foto: A Jäger, Regelschule Kaulsdorf

Descripción de la tarea y su objetivo:
El trabajo con la tarea requiere estructurar la situación Los/as estudiantes defienden sus reflexiones con argumentos y se enfrentan críticamente a otras propuestas.
Al trabajar la tarea, los/as estudiantes comprueban en qué medida han logrado, sobre todo, las *competencias matemáticas generales*:

– *modelar matemáticamente (C 3);*en el marco de la idea directriz *número* (ID 1).

Esquema de solución con indicaciones de las ideas directrices y las competencias matemáticas generales, así como su relación con los ámbitos de exigencia:

<table>
<tr><th rowspan="2">Soluciones y observaciones</th><th rowspan="2">Idea directriz</th><th colspan="3">Ámbito de exigencia</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Modelo propuesto:
– tiempo en por día en la escuela : 5 horas
– traslados a la escuela:1 hora
– tareas en casa:2 horas
Total: 8 horas por día de escuela.

40 semanas por 5 días de escuela son 200 días de escuela, es decir 1 600 horas al año Se observan diversos valores de referencia:
– Valor de referencia: 24 horas/día:
24 ● 365 horas por año, entonces aprox 18%
– Valor de referencia: 16 horas/día:
16 ● 365 horas por año, entonces aprox 27%
– Otros valores de referencia razonables.

Representar de forma comprensible las reflexiones a partir del modelo elegido Reaccionar de manera adecuada y objetivamente a preguntas y críticas.
El planteamiento de la tarea ofrece posibilidades de ampliar la discusión para abarcar el aspecto matemático.</td><td>ID 1</td><td></td><td>C 3</td><td></td></tr>
</table>

2.2.12 Ejemplo 12: Funciones lineales

<u>Planteamiento de la tarea:</u>

Dada una función lineal f con la ecuacion f(x) = -x -1.

a) Dibuje el gráfico de f en el plano de coordenadas. Muestre que el punto P (-93 ; 92) se encuentra en el gráfico dado.

b) Describa un camino que le permita encontrar la ecuación de otra función lineal cuyo gráfico atraviese el punto P(-93 : 92).

c) Dadas las funciones llineales g_m donde $g_m(x) = mx + 2$. ¿Qué condiciones de m se deben cumplir para que los gráficos de f y de g_m se corten en el cuadrante II?

<u>Descripción de la tarea y su objetivo:</u>

La tarea requiere un uso flexible de la relación entre el gráfico de la función y la ecuación de la función.

Al trabajar la tarea, los/as estudiantes comprueban en qué medida han logrado, sobre todo, las *competencias matemáticas generales*:

- *resolver problemas matemáticamente (C 2),*
- *utilizar representaciones matemáticas (C 4) y*
- *comunicar (C 6);* en el marco de la idea directriz *relación functional* (ID 4).

<u>Esquema de solución con indicaciones de las ideas directrices y las competencias matemáticas generales, así como su relación con los ámbitos de exigencia:</u>

Soluciones y observaciones		Idea directriz	Ámbito de exigencia		
			I	II	III
a)	Dibujar el gráfico Fundamentar la posición del punto, calculando.	ID 4	C 4		
b)	Especificaciones: – una pendiente diferente de -1 ó – un punto que no se encuentre en el gráfico de f. –	ID 4		C 6	
c)	Posibilidad 1: reflexiones gráficas sobre casos límites que deben ser observados. Posibilidad 2: solución calculada. Punto de Intersección $\mathbf{I}\left(\frac{-3}{m+1};\ \frac{2-m}{m+1}\right)$ para $\mathbf{x_I < 0}$; y también $\mathbf{y_I > 0}$ (Cuadrante II) donde $-1 < m < 2$.	ID 4			C 2

2.2.13 Ejemplo 13: ¿Prepago o postpago?

Planteamiento de la tarea:
Una empresa ofrece teléfonos celulares en modalidad postpago o prepago (recargo con tarjeta), bajo las siguientes condiciones:

Post pago

Teddy Active

AIKON 3410

Equipo: 0,00 €

Tarifa base mensual: 9,45 €

Costo de llamada por min:0,175€ *

SMS 0,19 €

Costos de instalación 24,95 €

(pago único)

Otros costos: ninguno

Pre pago (con tarjeta)

Teddy extra plus

AIKON 3410

Equipo: 129,95 (incluye 15 € de llamadas gratuitas)

Tarifa base: 0,00

Costo de llamada por min: 0,412 €*

SMS 0,19 €

Otros costos: ninguno

*Se asume un valor promedio para el cálculo de los costos de llamada por minuto

Prepare una asesoría a un cliente que ayude a tomar una decision entre un post pago y un prepago. Asuma en sus deliberaciones un tiempo de uso de 24 meses (duración del contrato) y considere minutos de llamadas por mes.

Descripción de la tarea y su objetivo:
El trabajo con la tarea requiere del modelaje de una compleja situación real. Los/as estudiantes defienden sus resultados mediante reflexiones argumentativas.
Al trabajar la tarea, los/as estudiantes comprueban en qué medida han logrado, sobre todo, las competencias matemáticas generales:

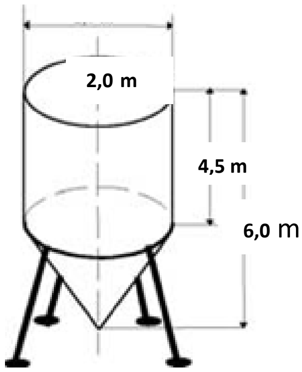
– modelar matemáticamente (C 3); en el marco de la idea directriz *relación functional* (ID 4).

Se permite usar la calculadora

Esquema de solución con indicaciones de las ideas directrices y las competencias matemáticas generales, así como su relación con los ámbitos de exigencia:

Soluciones y observaciones	Idea directriz	Ámbito de exigencia		
		I	II	III
Posibles soluciones: – Cálculo concreto de los diversas costos totales para un mes (10 min, 20 min,) y compración. – Empleo de un programa de hoja de cálculo. – Solucionar graficando . – Solucionar mediante un sistema de ecuación lineal. Para ello se debe prestart atención a: – costos de adquisición, – tarifa básica, – costos de instalación, – minutos libres, – costos mensuales por minutos de llamadas, – el hecho de que que los SMS cuesten igual en ambas tarifas. Una posible asesoría experta podría ser: “Si utiliza el servicio más de 26 minutos al mes, entonces le conviene un plan postpago”. (El valor matemático preciso es 26,2 min).	ID 4		C 3	

2.2.14 Ejemplo 14: Tanque de agua



(El dibujo no está hecho a escala)

Planteamiento de la tarea:

En la figura se representa un tanque de agua.

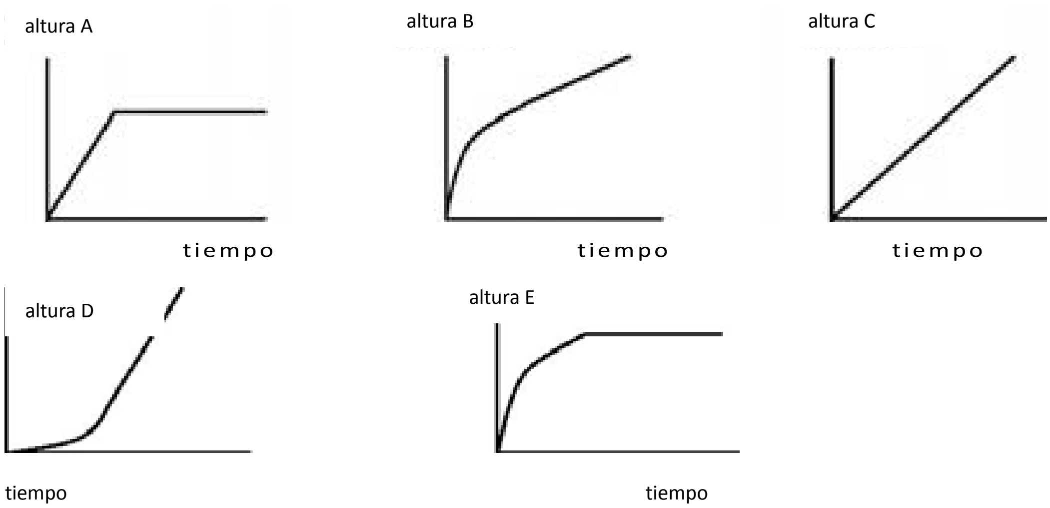
a) Estime el volumen total del tanque y marque su respuesta:

□ $5m^3$ □ $15m^3$ □ $35m^3$ □ $45m^3$

b) La parte punteaguda del tanque se llenará de agua hasta la mitad de su altura.
¿Cuántos m^3 de agua contiene el tanque?

c) El tanque vacío se llena de agua.

¿Cuál de los siguientes gráficos muestra cómo cambia el nivel del agua en el tiempo? Fundamente su elección.



Descripción de la tarea y su objetivo:

Junto con la estimación del volumen, se realizan cálculos relacionados al porcentaje y la elección fundamentada de un gráfico.

Al trabajar la tarea, los/as estudiantes comprueban en qué medida han logrado, sobre todo, las *competencias matemáticas generales*:

- *modelar matemáticamente (C 3),*
- *utilizar representaciones matemáticas (C 4),*
- *manejar elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas (C 5);* en el marco de la idea directriz *medir* (ID 2) y *relación funcional* (ID 4.)

Se permite el uso de la calculadora y de colecciones de formulas.

Esquema de solución con indicaciones de las ideas directrices y las competencias matemáticas generales, así como su relación con los ámbitos de exigencia:

	Soluciones y observaciones	Idea directriz	Ámbito de exigencia		
			I	II	III
a)	Estimación, por ejemplo: 1) $V_{tanque} \sim V_{cilindro} \sim 18\ m^3$ 2) $V_{tanque} \sim V_{paralelepípedo} \sim 24\ m^3$ Por lo tanto, 15 m^3 es el valor a marcar.	ID 2	C 3		
b)	Cálculo del volumen "…hasta la mitad de su altura" se calcula r=0,5 m; h=0,75m El volume de agua es de aprox 0,2 m^3 .	ID 2		C 5	
c)	Grafico B Al fundamentar se debe establecer el transcurso del tiempo de llenado completo en relación con la forma del cuerpo.	ID 4			C 4

3. Variación de las tareas

<u>Nota:</u> El punto 4 es una traducción del artículo de Hans Schupp, publicado en el libro sobre estándares de aprendizaje de las matemáticas (Blum y cols., 2006) págs.152-162.

Sin lugar a dudas, el trabajo con muchas tareas del mismo tipo tiene como resultado la „cosecha de plantaciones de tareas“, es decir un resultado de aprendizaje ostensible y de corta duración. Aquél que ya puede hacerlo, se aburre; aquél que no puede, sólo aprende como máximo una técnica aislada sin una comprensión de su trasfondo y sentido. Sobretodo, falta el tiempo para trabajar intensivamente en tareas individuales especialmente seleccionadas, que permitirán construir competencias importantes. Para esto existen posibilidades comprobadas como:

- el rastreo y la comparación de diferentes caminos de solución (ver Blume y cols., 2006; cap. 2, pág. 162)
- el extrabr y generalizar métodos y estrategias que se han usado de forma implícita (ib.cit.; cap. 5, pág. 135)
- el rastreo, análisis y corrección de errores típicos de los/as estudiantes (ib.cit. cap. 2, pág. 96)
- la reflexión sobre el sentido de cada tarea, es decir sobre el progreso de aprendizaje (ib.cit.;cap. 5)

En este capítulo se presentará otro enfoque, más bien poco conocido: el variar juntos una tarea después de haberla resuelto y el trabajar con las variantes encontradas. Esto se explicará a partir de dos ejemplos muy diferentes. El primer ejemplo es de tipo intra-matemático y el segundo es la tradicional tarea en contexto.

3. 1 Una tarea intra-matemática

La primera tarea puede parecer fuera de lo común en un principio, a pesar de que sólo aparecen conceptos que son conocidos desde la escuela primaria. Sin embargo, se demostrará que junto a sus variantes esta tarea cumple con criterios importantes de los estándares de aprendizaje y que se encuentra en relación estrecha con contenidos canónicos de los planes de enseñanza. Además, el ejemplo se ha sometido a prueba en clases (en tres clases de *Gymnasium*[1] y dos de *Realschule*), como parte del proyecto de investigación empírica de varios años de duración: “Tema con variaciones” (Schupp, 2002).

3.1.1 La tarea „Diferencia de cuadrados“

Diferencia de cuadrados

Si la diferencia de dos números cuadrados es: $21 = 5^2 - 2^2$.

a) Encuentra la mayor cantidad de números naturales, que también se pueden escribir como diferencia de dos números cuadrados. Indica la diferencia en cada caso.

b) ¿Qué números naturales no se pueden escribir de esta forma? Argumenta.

[1] A diferencia del *Realschule*, modalidad de escuela abierta todos los/las estudiantes, el *Gymnasium* está restringida a estudiantes de alto rendimiento que se preparan para estudios superiores universitarios.

- **Solución**

1. Los/as estudiantes formaron muchas diferencias de cuadrados y se encontraron con diferentes números naturales. Pero con ello no había resuelto aún ni a), ni b).

2. Rápidamente sistematizaron esta búsqueda, ya que repasaron los números cuadrados de acuerdo a su tamaño y en cada caso sustrajeron de ellos los números cuadrados más pequeños. O lo hicieron (en parte por sugerencia del profesor) al armar una tabla (de conexiones), en la que escribían los números cuadrados y mostraban las diferencias (en medida que no fueran negativas). Pero también estos procedimientos se interrumpen en algún momento, incluso cuando se traspasan a una hoja de cálculo, lo cual ocurrió dos veces y fue en un caso una aplicación de la técnica aprendida. De todas maneras, llegaron a dos supuestos:

   Con respecto a a): Todos los números impares y todos los números divisibles entre 4 se pueden escribir de esta manera.

   Por ejemplo: $3 = 2^2 - 1^2$; $7 = 4^2 - 3^2$; $12 = 4^2 - 2^2$; $28 = 8^2 – 6^2$.

   Con respecto a b); Todos los demás números naturales, es decir todos los números pares, que no son divisibles entre 4, no se pueden escribir de esta manera.

   Por ejemplo: 2; 10; 22; 98.

3. Les llamó la atención (especialmente en la tabla), que la diferencia de dos números cuadrados vecinos siempre es impar. En efecto, se dio lo siguiente:
   $(n + 1)^2 – n^2 = n^2 + 2n + 1 – n^2 = 2n + 1$.
   Ahora era lógico observar un número cuadrado y el número cuadrado subsiguiente:
   $(n + 2)^2 – n^2 = n^2 + 4n + 4 – n^2 = 4n + 4 = 4 \bullet (n + 1)$
   Entonces, cada número natural divisible entre 4 es también la diferencia entre dos números cuadrados.
   ¿Pero por qué se niegan los otros números impares a ser representados de esta manera? Podrían aparecer como resultados de las diferencias que aún no se han analizado
   $(n + i)^2 – n^2$.
   $(n + i)^2 – n^2 = n^2 + 2ni + i^2 – n^2 = 2ni + i^2$
   Si i es par, entonces 2ni e i^2 son divisibles entre 4, es decir el resultado es $2ni + i^2$.
   Si i es impar, entonces es 2ni par e i^2 impar, el resultado es entonces impar.
   También se podría llegar a una solución mediante $a^2 - b^2 = (a + b) \bullet (a – b)$.
   Si a y b son pares, entonces también lo son a + b y a – b y por ende $(a + b) \bullet (a – b)$ es divisible entre 4.
   Si a y b son impares, entonces rige lo mismo. Si a es par y b es impar (o viceversa), entonces a + b y a – b son impares y también su producto.
   En efecto, no se dan números pares que no sean divisibles entre 4.

- **Análisis**

Dado que la tarea demanda conocimientos elementares de álgebra (fórmulas binomiales, divisibilidad de expresiones algebraicas), se trabajó a partir de los/as grado[2] (en total: tres veces en los/as grado y dos veces en décimo grado). A pesar de – o quizás justamente por – su carácter de novedad, la tarea despertó gran interés en los/as estudiantes. Fue formulada de tal manera, que primero se tenía que recoger los datos (idea directriz *datos y azar*).

Cualquiera podía involucrarse en esta parte. Para poder avanzar, se tenía que sistematizar lo recolectado (competencia *usar representaciones*), expresar supuestos y finalmente fundamentar (competencia *argumentar*), para lo cual se tenía que aplicar los contenidos de álgebra aprendidos (competencia *manejar elementos simbólicos, técnicos y formales*). Es claro que este trabajo se relacionaba principalmente con la idea directriz *número*, ya que se revisaban discretamente conocimientos de grados anteriores (números cuadrados, par e impar, divisibilidad), pero también con la idea directriz *relaciones funcionales.*

En la fundamentación de la tarea b) se va más allá de los ámbitos de exigencia I (recolectar) y II (sistematizar, suponer, probar con medios sencillos). Las dos cadenas de argumentación (alternativas, pero que sucedían en paralelo en dos grupos de estudio) resultaron ser muy largas para algunos escolares de la *Sekundarstufe I*[3], es decir poco claras debido a las distinciones de casos. Aquí se debía trabajar de forma diferenciada. En un grupo de estudio de la *Hauptschule* se debió dejar de lado la tarea b) o por lo menos la exigencia de fundamentar.

- **Variaciones**

Se pidió a los/as estudiantes cambiar algo en la tarea resuelta (por ejemplo un concepto, un signo, una pregunta, una condición dada) y generar así una nueva tarea.

En una clase de noveno grado ya se habían hecho variaciones. La clase había hecho más de una variante, con las cuales trabajaron más adelante: $a^2 + b^2$ en vez de $a^2 – b^2$, producto y cociente de dos números cuadrados, números cubos en vez de números cuadrados ($c= a^1 – b^1 = a – b$ se resolvió inmediatamente: cada número natural se puede representar muchas veces como diferencia de dos números naturales).

Después de algunas vacilaciones debido al carácter totalmente nuevo de la situación, en algunos clases se reemplazó “diferencia” por “suma” y se empezó a trabajar sobre la nueva tarea. Para ello existían dos posibles procedimientos: inspeccionar las posibles representaciones mediante una modificación de la tabla de la que se disponía y trabajar algebraicamente de forma análoga a las expresiones algebraicas de la diferencia. En dos clases esto sucedió en simultáneo (en dos grupos de trabajo), en las otras sucedió en forma sucesiva.

[2] El el sistema educativo peruano correspondería a segundo grado de secundaria.
[3] Hasta cuarto grado de secundaria.

La inspección resultó al inicio en una imagen difusa. No todos los números impares se pueden representar, por ejemplo 3 y 7; tampoco se pueden representar todos los números divisibles entre 4, por ejemplo 12 y 24. Por otro lado, hay números pares, que sólo son divisibles entre 2 y que sin embargo son sumas cuadradas,
por ejemplo $18 = 3^2 + 3^2$ y $20 = 4^2 + 2^2$.
¿Acaso no había ninguna regularidad? Sí la había. En una clase un estudiante la notó, en otra clase se requirió la ayuda del profesor: 3 y 7 no son los únicos números que no son sumas de cuadrados, también lo son 11; 15; 19, etc. ; es decir todos los números naturales, que al ser divididos entre 4 tienen un residuo de 3. ¿A qué se debe esto?

Ahora se debía volver al camino algebraico. Los/as estudiantes habían examinado primero $(n + 1)^2 + n^2$ y encontrado $2 \bullet n \bullet (n + 1) + 1$. Eso es con seguridad un número impar. Algunos estudiantes concluyeron de esto, que todos los números impares se pueden representar como la suma de números cuadrados seguidos. Sin embargo, la analogía con $2n + 1$ fracasa: si n recorre todos los números naturales, entonces $2n + 1$ es siempre un número impar, pero no lo es $2 \bullet n \bullet (n + 1) + 1$, como se puede comprobar cuando se reemplazan los valores. (Recién a partir de este análisis de errores fue que los estudiantes entendieron que la expresión $2n + 1$ representaba números impares!). La misma comprensión se dio para $(n + 2)^2 + n^2 = 2 \bullet (n^2 + 2n + 2)$ y los números pares.
Ahora con respecto a la pregunta anterior: Si a y b son pares, entonces también lo es $a^2 + b^2$. Si ambos son impares, entonces $a^2 + b^2$ sigue siendo par. Cuando a es par y b impar (o viceversa), entonces $a^2 + b^2$ es impar. ¿Por qué es imposible entonces que se quede *ein Vierer-Rest 3*? Porque $(2u)^2 + (2v + 1)^2 = 4 \bullet (u^2 + v^2 + v) + 1$.

Se tuvo que conducir a los/as estudiantes a esta última reflexión. Lamentablemente nuestros estudiantes están poco acostumbrados a utilizar variables y expresiones algebraicas para la formulación de condiciones y afirmaciones y están menos acostumbrados aún a utilizar las transformaciones de expresiones algebraicas para construir relaciones. En este caso, estas técnicas adquieren un sentido que resulta motivador.

En una clase se dio una comparación interesante, motivada por una alumna. Ella mencionó, que se pueden escribir más números naturales como diferencias de cuadrados que como sumas de cuadrados. Efectivamente: en el caso de las diferencias cada cuarto número queda fuera (aquellos con *ein Vierer-Rest 2*). En el caso de las sumas sucede lo mismo (aquellas con *ein Vierer-Rest 3*), pero también quedan fuera muchos otros números naturales (pares e impares). (Que ambos conjuntos numéricos sean equivalentes a los conjuntos de todos los números naturales y también entre sí, es irrelevante en este contexto).

Lamentablemente este grupo no conocía aún el concepto clásico de probabilidad; de lo contrario se hubiera podido formular también: la probabilidad de que un número natural elegido al azar se pueda representar como la diferencia (o suma) de dos cuadrados
es $\frac{3}{4} (< \frac{3}{4})$. Con eso se hacía referencia a la idea directriz *datos y azar*. No se puede negar, que esta tarea extra es más exigente que la predecesora. Esto no rige para las representaciones de los números naturales como productos o cocientes de cuadrados.

Las cuatro clases "principiantes" hallaron rápido (después de formular la tarea de una manera más evidente), que sólo los números cuadrados se pueden escribir de esta forma, y que esto aplica para todos los números cuadrados.

La clase con más experiencia en „variaciones“ optó por trabajar $a^3 - b^3$, pero no lograron pasar de afirmaciones cualitativas (tal como se esperaba): los huecos en la pizarra crecían cada vez más en cantidad, porque los números cúbicos están menos próximos que los números cuadrados.

Con esto tenemos un ejemplo de que las variantes de una tarea pueden tener diferente grado de dificultad, de banal a fácil, factible, difícil, demasiado difícil por el momento (por lo menos en el colegio), hasta imposible, es decir sin solución. Por consiguiente se transmite la imagen representativa de unas matemáticas vivas, en comparación con la percepción común – y fomentada sin querer por la matemática escolar tradicional - entre novatos de las matemáticas como disciplina, que ya ha resuelto todos sus problemas.

Hasta el momento todas las variantes eran previsibles. Sin embargo, sucedió algo, que no solo es inevitable, si no también deseado: no sólo no se mencionaron algunas de las variaciones que el grupo de investigadores anticipó, sino que se hicieron propuestas (de parte de los/as estudiantes y sus profesores), en las cuales no se había pensado antes.

Así, en una clase llamó la atención que algunos números naturales tuvieran más representaciones posibles que diferencias de cuadrados, por ejemplo $40 = 11^2 - 9^2 = 7^2 - 3^2$. “¿De qué depende el número de representaciones posibles?”, preguntaron. La profesora, sorprendida, pidió como tarea pensar al respecto. En efecto, dos escolares (y la profesora) trajeron una respuesta. De $a^2 - b^2 = (a + b) \bullet (a - b)$ resulta, que hay tantas representaciones de las diferencias, como representaciones de los productos del número correspondiente. Esto se precisó en clase, al mencionar que solo „cuentan“ los productos, en los cuales uno de los dos factores o es par o ambos factores son impares (ver arriba).
$40 = 20 \bullet 2 = 10 \bullet 4$. En el primer caso se da $a + b = 20$ y $a - b = 2$, entonces $a = 11$ y $b = 9$. En el segundo caso se da $a + b = 10$ y $a - b = 4$, entonces $a = 7$ y $b = 3$.

En otra clase el profesor pidió investigar números naturales específicos, con respecto a su representación como diferencias de cuadrados y también con respecto al número cuadrado en sí. Sabemos que todos los números cuadrados son o impares o divisibles entre 4. El resultado: se pueden representar todos los números cuadrados como diferencia de dos números cuadrados. Los/as estudiantes resolvieron esta tarea de forma espontánea y la continuaron dos veces.

Los números cúbicos son o divisibles entre 8 o impares. Entonces se pueden representar como diferencias de números cuadrados. Los números primos son impares (excepción: 2). Para ellos rige lo mismo (aunque dado que sólo hay un único producto posible, sólo hay una representación posible. Pero para llegar a esta comprensión se tendría que haber hecho el mismo análisis que en la otra clase).

Como se ve de manera transversal, las variaciones de una misma tarea pueden llevar a diversos recorridos, a pesar de tener un núcleo común. El tiempo necesario también fue diferente de acuerdo al grupo y osciló entre $1\frac{1}{2}$ y $2\frac{1}{2}$ horas pedagógicas. ¿Valió la pena la inversión?

Resumen

Las experiencias y los comentarios arriba deben haber dejado claro, que recién se aprovecha el potencial didáctico de la tarea – que se evidencia al resolverla -, cuando se trabajan las variaciones. Además es importante tener en cuenta lo siguiente:

a) Se practica sin ser insistente (ver Blum, 2006; cap. 3, pág. 113): se revisan los componentes de la divisibilidad elemental, que ya se habían olvidado, y se utilizan los conocimientos sobre el manejo de variables y términos.

Pero esta práctica es más que una simple repetición, ya que los contenidos se demuestran unos a partir de los otros y se formulan mediante formas de representación y argumentación cada vez más avanzadas y precisas. Por ende, se trata de un aporte a la adquisición cumulativa de la competencia, tal como lo proponen los estándares de aprendizaje.

b) La tarea es propuesta por otro y por ende su solución es una reacción (importante y necesaria). Sin embargo, sus variaciones son una producción de los propios escolares. De ellas emana una alta motivación, que favorece la actividad de los/as estudiantes, de modo que profundizan y valoran las siguientes tareas. Esto afecta no sólo los resultados, sino también las formas de comunicación y cooperación al obtenerlos (competencia *comunicar*).

En el mediano plazo se debe aspirar a que los grupos de estudios sean quienes recolectan las variaciones, evalúen su lógica y grado de dificultad, las estructuren y las repartan entre sí, antes de que empiecen a examinarlas (ámbito de exigencia III).

En este proceso el consejo y la ayuda de un profesor son necesarios; sobretodo tendrá efecto sobre la elección de formas adecuadas de armar la sesión de aprendizaje, las relaciones sociales y la diferenciación. La clase de tercer grado de secundaria, sobre la que se contó anteriormente, ya se encontraba en camino de lograr todo esto.

c) En una clase un profesor volvió a abordar al final de la sesión la tarea parcial b) de la tarea original. Se evidenció que en un inicio habían comprendido solo parte de la solución. El variar tiene un efecto sobre la reflexión. Así, algunas tareas y su solución se comprenden recién cuando se realizan variaciones. Pero también se da el efecto contrario: una tarea sencilla, y quizás aburrida, gana a partir de cambios atractivos (por ejemplo, cuando se dan las variantes $\frac{2}{x} - 3 = 5$ y $2x^2 - 3 = 5$ de $\frac{2}{x} - 3 = 5$).

d) Las variaciones no se deben trabajar en clase de forma exagerada, ni aislada. Por un lado, para su uso se asume que las clases tradicionales son la regla. Por otro lado, las variaciones benefician justamente a la clase tradicional. Esto rige especialmente para estrategias de variación, que se utilizan implícitamente en un inicio (o que se utilizan porque han sido indicadas), y que se explicitan gradualmente, para que se pueda hacer un uso consciente de ellas.

En el ejemplo anterior se trata de las siguientes estrategias:

- “tambalear“ (cambiar levemente: por ejemplo, usar el exponente 3, en vez del 2)
- “reemplazar” (formar analogías: por ejemplo +, • , : en vez de –)
- “aumentar” (condiciones, es decir “especializar”: representar números cuadrados, cúbicos o primos).
- “comparar” (relacionar: representaciones de sumas y diferencias)
- “cambiar de perspectiva” (descentrar: de una representación a varias representaciones).

Encuentran otras estrategias de este tipo en Schupp (2002, pág. 31). Evidentemente se trata de estrategias heurísticas elementales, de la cuales los/as estudiantes deberían disponer (y en las cuales muchas veces fracasan, por una falta de flexibilidad), sobre todo en el caso de tareas difíciles y/o propuestas por otros.

e) Variar es un método natural y muy útil en el quehacer del matemático investigador, como se puede comprobar a partir de muchas declaraciones de los expertos (y también a partir de la historia de las matemáticas). Al tener en cuenta las variaciones en el aprendizaje escolar y de las matemáticas se hace un aporte a la clase “investigadora”, que se fomenta tanto, pero se pone en práctica tan poco. Naturalmente, este enfoque no elimina la posibilidad, más bien exige, que el docente sea quien varíe en clase de tiempo en tiempo y haga consciente esta estrategia. Eventualmente se puede añadir la pregunta: “¿Qué más se podría cambiar?”

A continuación el segundo ejemplo, muy diferente:

3. 2 Una tarea en contexto

El ejemplo aquí presentado parte de una tarea en contexto más bien tradicional. Se tomó de la base de tareas de la KMK (Conferencia de Ministros de Cultura de la República Federal de Alemania) y está pensada para los grados de primero y segundo de Secundaria. Sin embargo, aún no se cuenta con la experiencia de poner esta tarea en práctica.

3. 2. 1 La tarea „Pintar la fachada"

Pintar la fachada

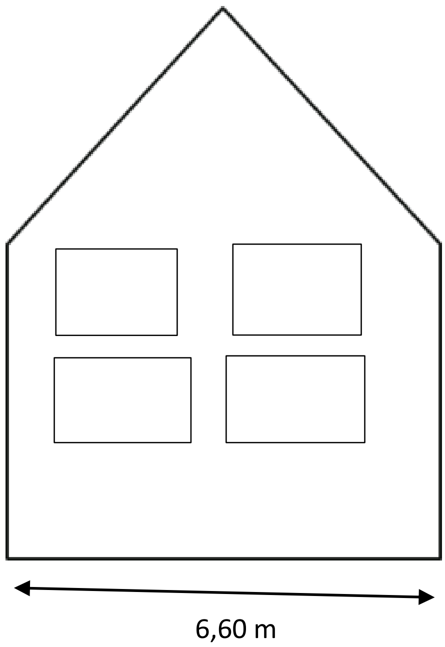
La familia Meister quiere pintar el frente de su casa con pintura para fachadas.
Una cadena de tiendas ofrece pintura para fachadas como oferta del día:

Consumo: 1 litro para 5m^2 aproximadamente
2, 5 litros (8,20 €/litro)
5,0 litros (7,80 €/litro)
10,0 litros (6,90 €/litro)

El señor Meister piensa: „Compraré el balde de 10 litros, ya que así el precio por litro es más barato y ahorro más. "

¿Qué piensas tú al respecto? Argumenta tu respuesta.

Nota: Las otras medidas se pueden obtener del dibujo a escala. (ojo: en esta versión el dibujo no está a escala)



- **Solución**

Con las medidas dadas se puede calcular el área que se va a pintar: son alrededor de 35 m^2. Si se considera un balde de 5 litros y otro de 2,5 litros, entonces se tiene suficiente pintura para 37,5 m^2. Si el señor Meister compra los dos baldes, paga 20,50 € + 39,00 € = 59,50 €. Por consiguiente, paga bastante menos que 69,00 € por el balde de 10 litros. Su deliberación no era correcta.

- **Análisis**

Se requiere de actividades en el marco de las ideas directrices *número, medir y espacio y forma*. Estas requieren de las competencias *argumentar, modelar, usar representaciones y manejar elementos simbólicos, técnicos y formales.* Los pasos aislados no son difíciles, pero son muchos y deben poder resumirse y representarse de forma estructurada y argumentativa. La tarea corresponde al ámbito de exigencia II.

- **Variaciones**

Naturalmente, se pueden „tambalear“ las medidas dadas. Pero esto solo resulta interesante, si es que tiene un efecto en la decisión del señor Meister. Nos preguntamos: ¿Bajo qué circunstancias habría tomado una decisión diferente?

Algunas posibilidades:

- El balde de 10 litros es más barato (por ejemplo 5,80 €/litro).
- Los baldes más pequeños son más caros (por ejemplo 9,99 €/litro y 8,99 €/litro).
- El consumo es mayor que el consumo dado (por ejemplo 1 litro solo alcanza para 4 m^2). Sobretodo esta última medida es crítica (como se puede suponer de la indicación “aproximado” en la oferta). El señor Meister debe mirar de cerca su fachada. ¿Es lisa o rugosa (lo cual aumenta la superficie)? ¿Se ha pintado antes?¿Cuánto de la pintura absorberá el yeso? ¿Está muy sucia por el clima, de modo que pueda ser necesario darle dos manos (una de ellas con pintura diluida)?¿Es posible que baste solo una mano, si se usa una pintura más cara?

Se recomienda repartir las distintas posibilidades entre los grupos de trabajo, hacer los cálculos respectivos y discutir las decisiones correspondientes en plenario. Este tipo de “crítica” constructiva de la tarea inicial la hace más interesante y de hecho también más auténtica. Este esfuerzo se puede reforzar mediante una “actualización” de la situación: ¿Qué pinturas para fachada venden en otras tiendas? ¿En qué envases y a qué precios se vende la pintura? ¿Cómo se plantearía ahora la tarea?

A manera de ejemplo queda claro, que los en las decisiones con respecto a preguntas extra-matemáticas no sólo influyen deliberaciones intra-matemáticas, sino también aquellas con respecto al contexto; que el cálculo matemático no es el decisivo, sino que ayuda a elegir. Así, algunas de las tareas de aplicaciones de nuestros libros de texto se podrían enriquecer mediante la variación crítica.

¿Cómo llega el señor Meister a la punta del frontis, que mide más de 8 metros? ¿No hay un zócalo en esta casa? ¿Por qué pinta solo un lado de su casa? ¿Por qué no pinta los otros lados? ¿Cómo podrían verse los lados? Nombra diferentes posibilidades, elige una, dibújala, calcula el área a pintar, súmala y llega a un consumo total de pintura, sí como de los envases correspondientes. Estas son preguntas y estímulos complementarios, que le dan un carácter casi de proyecto a la pregunta inicial, que es bastante cerrada (ver ib.cit.; cap. 4, pág. 126).

BLUM (2005) presenta otro ejemplo de una variación, que permite profundizar en la aplicación; él parte de un ejemplo de los estándares de aprendizaje (ver KMK 2003, pág. 16).

3.3 Conclusiones

Evidentemente, las mismas variaciones y también las formas (estrategias) de variar dependen del “tema”; pero también de los conocimientos y las experiencias heurísticas previas de cada grupo de aprendizaje, así como de las intenciones del docente. Este debe decidir previamente, cuando y donde - y de ser el caso cuán extensiva- e intensivamente - se debe variar, mediante la liberación de algunos conceptos y componentes de la tarea inicial.

Ya que uno puede variar todas las tareas, se debe poner especial énfasis en lo siguiente: Lo decisivo no es la cantidad de variaciones realizadas o de las variantes resultantes, sino la diversidad y calidad del proceso de variar.

Las variaciones pequeñas – por ejemplo de una sola característica de la tarea - también pueden avivar la clase, sobretodo cuando son los/as estudiantes quienes las proponen (lo que sucede pronto).

También se recomienda incluir variaciones como parte de las evaluaciones de desempeño. Por ejemplo:

Cuadrados parciales

a) Dibuja un cuadrado y divídelo en 4 cuadrados parciales.

b) Demuestra que se puede dividir el cuadrado en 9; 16; 25, . . . cuadrados parciales, es decir siempre de tal forma que el número de cuadrados parciales es un cuadrado. Basta con que hagas un bosquejo.

c) ¿Es posible hacer otras divisiones muy distintas del cuadrado en cuadrados parciales?

Variar no es un fin es si mismo. Si se utiliza de forma dosificada, contribuye a hacer las clases más abiertas, exigentes, productivas y esenciales – tal como lo proponen los estándares de aprendizaje.

Referencias bibliográficas

BLUM, W.; DRÜCKE-NOE, C.; HARTUNG, R.; KOELLER, O. (2006) Bildungsstandards Mathematik: konkrete. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. IQB-Cornelsen Scriptor. Berlín, Alemania.

KMK Conferencia Permanente de Ministros de Cultura de Alemania (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* Estándares de aprendizaje para matemáticas en el ámbito de Primaria. Recuperado el 18 de junio de 2014 de http://www.kmk.org/

KMK Conferencia Permanente de Ministros de Cultura de Alemania (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Estándares de aprendizaje al término del nivel medianos. Décimo grado. Recuperado el 18 de junio de 2014 de http://www.kmk.org/

KMK Conferencia Permanente de Ministros de Cultura de Alemania (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Estándares de aprendizaje para matemáticas al concluir décimo grado. Recuperado el 18 de junio de 2014 de http://www.kmk.org/